

Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 621.891
doi: 10.30987/2782-5957-2022-3-16-21

ПОДАТЛИВОСТЬ ПЛОСКОГО СТЫКА ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Виктор Петрович Тихомиров¹, Михаил Александрович Измеров^{2✉}, Пётр Викторович Тихомиров³

^{1,2} Брянский государственный технический университет, бульв. 50 лет Октября 7, г. Брянск, Россия.

³ Брянский государственный инженерно-технологический университет, проспект Станке Димитрова, д.3, г. Брянск, Россия.

¹ dm-bgtu@yandex.ru, 0000-0002-7269-8175

² m.izmerov@yandex.ru, 0000-0003-4170-6184

³ vtichomirov@mail.ru

Аннотация

Цель исследования: оценка податливости плоского стыка фрактальных поверхностей под нагрузкой.

Задача, решению которой посвящена статья: оценка сближения фрактальных поверхностей под нагрузкой.

Методы исследования: моделирование контактного взаимодействия стыка, аналитические расчёты.

Новизна работы: определены и обоснованы границы применения моделей контактного взаимодействия поверхностей (фрактальная и модель Герца).

Результаты исследования: определена контактная жёсткость стыка плоских поверхностей для фрактальных моделей (пластический режим) и модели Герца (упругий режим), а также найдена точка перехода из одного режима в другой.

Выводы: при разном параметре шероховатости податливость стыка падает с ростом нагрузки (увеличении сближения), а податливость при одних и тех же условиях растёт с уменьшением параметра шероховатости и увеличением фрактальной размерности D .

Ключевые слова: фрактал, поверхность, контактная жесткость, модель, взаимодействие, податливость.

Ссылка для цитирования:

Тихомиров В.П. Податливость плоского стыка фрактальных поверхностей / В.П. Тихомиров, М.А. Измеров, П.В. Тихомиров // Транспортное машиностроение. – 2022. - № 3. – С. 16 – 21 . doi: 10.30987/2782-5957-2022-3-16-21.

Original article
Open Access Article

COMPLIANCE OF A FLAT JOINT OF FRACTAL SURFACES

Viktor Petrovich Tikhomirov¹, Mikhail Aleksandrovich Izmerov^{2✉}, Pyotr Viktorovich Tikhomirov³

^{1,2} Bryansk State Technical University, 7, 50-let Oktyabrya Boulevard, Bryansk, Russia.

³ Bryansk State University of Engineering and Technology, 3, Stanke Dimitrova Avenue, Bryansk, Russia.

¹ dm-bgtu@yandex.ru, 0000-0002-7269-8175

² m.izmerov@yandex.ru, 0000-0003-4170-6184

³ vtichomirov@mail.ru

Abstract

The work objective is to assess the compliance of a flat joint of fractal surfaces under load.

The problem to which the paper is devoted is to assess the juxtaposition of fractal surfaces under load.

Research methods: modeling of the contact interaction of the joint, analytical calculations.

The novelty of the work: the bounds of applying models of contact interaction of surfaces (fractal and Hertz model) are defined and analyzed.

Study results: the contact stiffness of flat surfaces joint for fractal models (plastic mode) and Hertz model (elastic mode) is defined, and the transfer point from one mode to another is found.

Conclusions: with different roughness parameters, the joint compliance decreases with increasing

load (increasing juxtaposition), and compliance under the same conditions increases with a decrease in roughness and an increase in fractal dimension D .

Keywords: fractal, surface, contact stiffness, model, interaction, compliance.

Reference for citing:

Tikhomirov V.P. Compliance of a flat joint of fractal surfaces / V.P. Tikhomirov, M.A. Izmerov, P.V. Tikhomirov // Transport Engineering. - 2022. - no. 3. - p. 16 – 21. doi: 10.30987/2782-5957-2022-3-16-21.

Введение

Первичная поверхность отражает такие структурные особенности фрактальной поверхности, как наличие мелких локальных пиков, которые не могут быть выявлены после записи профилограмм, когда конечный радиус прибора после ошупывания поверхности приводит к формированию вторичной поверхности (профиля).

Известные модели шероховатой поверхности представляют собой набор выступов в виде сферических сегментов (рис. 1). В частности, статистическая модель Гринвуда-Вильямсона [1] предполагает, что все выступы имеют один и тот же радиус скругления вершин микронеровностей r , а сами выступы деформируются упруго.

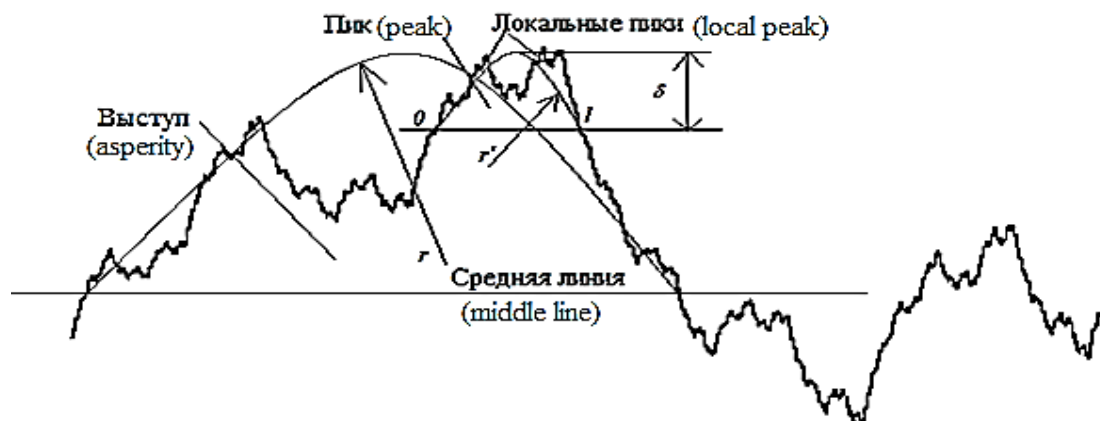


Рис. 1. Профиль фрактальной поверхности
Fig. 1. Fractal surface profile

При этом высоты выступов подчиняются определенному вероятностному закону распределения. Параметры модели находят с помощью оценки спектральных моментов. Соотношение между нагрузкой и деформацией соответствует теории Герца. При малых нагрузках несущая способность контакта определяется деформацией локальных пиков, которая носит в основном пластический характер [2]. При увеличении нагрузки происходит формирование пятен контакта с такими площадями, при которых их пластическое состояние переходит в упругое [5].

Предельная величина нагрузки с уче-

том особенностей структуры фрактального профиля составляет

$$F_{cr} = \frac{4E}{3\pi} G^{D-1} a_{cr}^{(3-D)/2}.$$

Здесь E – модуль упругости; G – параметр фрактальной шероховатости; D – фрактальная размерность ($1 < D < 2$); a_{cr} – площадь пятна контакта, соответствующая переходу от пластического состояния к упругому, равная

$$a_{cr} = \left(\frac{E}{H} \frac{4\pi^{1/2}}{3} \right)^{\frac{2}{D-1}} G^2.$$

Податливость фрактальной поверхности при упругом состоянии выступов

Податливость выступа фрактальной поверхности в этом случае найдем как

$$j'_N = \frac{d\delta/da}{dF'_N/da}$$

С учетом того, что

$$\delta = G^{D-1} a^{(2-D)/2};$$

$$dF'_N/da = \frac{2E}{3\pi} (3-D) G^{D-1} a^{(1-D)/2}$$

получим

$$d\delta/da = \frac{G^{\frac{2(D-1)}{(2-D)}} (2-D)}{2\delta^{D/(2-D)}}$$

Окончательно запишем выражение,

$$G = \left(\frac{R_q^2 \sin[\pi(2D-3)/2] \Gamma(2D-3)}{L^{2(2-D)}} \right)^{\frac{1}{2(D-1)}}.$$

Здесь $L = 800$ мкм – базовая длина профилограммы; $\Gamma(\dots)$ – гамма функция.

Множественный контакт

Размерное распределение площадей среза выступов [6] определяется соотношением

$$n_t(a') = \frac{D}{2} a_L^{(D/2)} a'^{-\left(\frac{D+2}{2}\right)},$$

Здесь a' – площадь среза недеформированной неровности (для упругого контакта $a' = 2a$, для пластического $a' = a$); a_L – максимальная площадь среза неровности.

Количество площадей среза, лежа-

$$j_N = \left[\int_{a_{cr}}^{a_L} \frac{2E}{3\pi^{1/2}} \left(\frac{3-D}{2-D} \right) a^{1/2} n(a') da' \right]^{-1} = \left[\frac{4ED(3-D)\psi^{(1-\frac{D}{2})}}{3\pi(2-D)(1-D)} \left(a_L^{1/2} - a_L^{\left(\frac{D}{2}\right)} a_{cr}^{\left(\frac{1-D}{2}\right)} \right) \right]^{-1}.$$

Количественная оценка податливости стыка в зависимости от параметров фрактальной шероховатости приведём в таблице.

Таблица

Податливость стыка в зависимости от сближения

Table

Joint malleability depending on rapprochement

| Ra, мкм | D | Радиус r, мкм | j_N / δ (податливость j_N в нм/Н; сближение δ в мкм) | | | | |
|---------|-------|---------------|--|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 2,5 | 1,477 | 352 | 1,858/ 6,366 | 1,230/ 6,831 | 0,931/ 7,241 | 0,738/ 7,595 | 0,616/ 7,907 |
| 1,25 | 1,520 | 78 | 7,032/ 1,513 | 4,640/ 1,621 | 3,466/ 1,710 | 2,771/ 1,787 | 2,311/ 1,854 |
| 0,63 | 1,563 | 22 | 20,87/ 0,456 | 13,720/ 0,486 | 10,220/ 0,510 | 8,153/ 0,531 | 6,788/ 0,549 |

Анализ приведенной таблицы показывает, что при разном параметре шероховатости податливость стыка падает с ростом нагрузки (увеличении сближения).

отражающее податливость отдельного выступа, учитывая, что $\delta = f(a)$:

$$j'_N = \left[\frac{4E}{3\pi} \left(\frac{3-D}{2-D} \right) a^{1/2} \right]^{-1}.$$

Параметры фрактальной шероховатости можно вычислить, используя следующие формулы [3]

$$D = \frac{1,548}{R_q^{0,041}}.$$

Параметр фрактальной шероховатости [9] будет равен

щих между a' и $a' + da'$ равно $n(a')da'$. Распределение площадей фактических пятен упругого контакта, отличающихся от площадей среза, примем в виде

$$n(a') = \frac{D}{2} a_L^{(D/2)} \psi^{(1-D/2)} a'^{-\left(\frac{D+2}{2}\right)},$$

Здесь $\psi = 2,572D^{-0.587}$.

Тогда податливость стыка определяется выражением

Податливость при одних и тех же условиях растет с уменьшением параметра шероховатости и увеличением фрактальной размерности D .

Важным представляется уточнение условий, при которых можно использовать фрактальную модель, то есть оценить

условие перехода для конкретной фрактальной поверхности к модели Герца.

Оценка перехода от фрактальной модели к модели Герца

Рассмотрим уравнения оценки контактной жёсткости для указанных моделей контактного взаимодействия.

1. Модель Герца

Запишем соотношение между нагрузкой на сферический сегмент и его деформацией:

$$F = \frac{4}{3} E' (r')^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

Здесь приведенный модуль упругости $\frac{1}{E'} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$, где $E_{1,2}$ – модули упругости материалов сопряженных тел, $\mu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона.

Нормальная контактная жесткость,

$$\frac{K_n}{E'} = 2 \left(\frac{l^D}{10,188 G^{D-1}} \right)^{1/2} [2G^{D-1} (\ln \gamma)^{1/2} l^{2-D}]^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10,188}} (\ln \gamma)^{1/4} l. \quad (4)$$

Величину нагрузки на пятно контакта можно найти по выражению

$$F = \frac{4}{3} E' \frac{l^{\frac{D}{2}}}{\sqrt{10,188} G^{(D-1)/2}} [2G^{D-1} (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} l^{2-D}]^{\frac{3}{2}} = 1,182 E' G^{D-1} (\ln \gamma)^{\frac{3}{4}} l^{3-D}, \quad (5)$$

где D – фрактальная размерность; ($1 < D < 2$); G – параметр фрактальной шероховатости; $\gamma=1,5$.

Выразив из уравнения (5) отрезок l и подставив в уравнение (4), получим

$$\frac{K_n}{E'} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10,188}} \left[\frac{1}{1,182 G^{D-1} (\ln \gamma)^{3/4}} \frac{F}{E'} \right]^{1/(3-D)}.$$

В одних координатах представим зависимости нормальной контактной жесткости от нагрузки для гладкого стального сферического индентора, представленного на рис. 1, и для фрактальной модели, при

деленная на приведенный модуль упругости, определяется выражением

$$\frac{K_n}{E'} = \frac{1}{E'} \frac{dF}{d\delta} = 2(r')^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Подставив в уравнение (2) значение δ из соотношения (1), запишем

$$\frac{K_n}{E'} = \left(6r' \frac{F}{E'} \right)^{1/3}. \quad (3)$$

2. Фрактальная модель

Отношение контактной жесткости к приведенному модулю упругости с учетом того, что профиль описывается фрактальной «кривой», выразим следующей зависимостью:

следующих данных: $E' = 2 \cdot 10^5$ МПа; $G = 6,76 \cdot 10^{-6}$ мм; $D = 1,53$; $r' = 0,173$ мм.

Рис. 2 иллюстрирует зависимости K_n/E' от F/E' для рассматриваемых моделей.

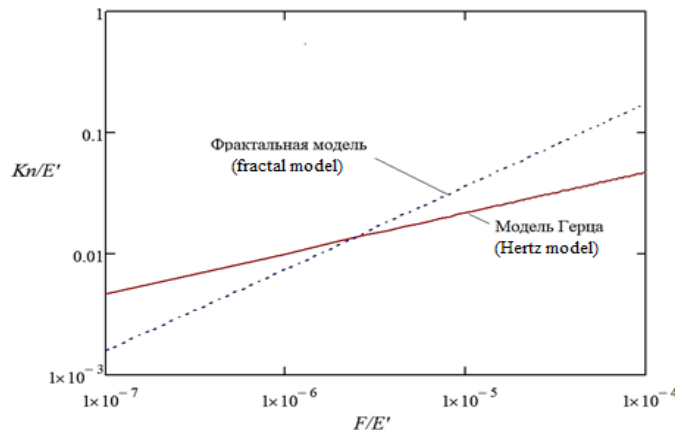


Рис. 2. Зависимости нормальной контактной жесткости от нагрузки (в относительных величинах) для фрактальной модели и модели Герца
Fig. 2. Dependences of the normal contact stiffness on the load (in relative values) for the fractal model and the Hertz model

Аналитическая зависимость перехода от фрактальной модели к модели Герца

$$F_{tr} = E' \left[\frac{0,886}{(6r')^{\frac{1}{3}}} \right]^{-\frac{3(3-D)}{D}} \left[\frac{1}{1,182G^{D-1}(\ln \gamma)^4} \right]^{\frac{3}{D}}.$$

Сравним полученный результат (нагрузку перехода) с данными, приведенными в работе [4] Порты и Попова (Pohrt,

$$F_{tr} = E' [\zeta(H)^{3H+3} R_q^{-3} L^{3H} (6R)^{H-1}]^{1/(H-2)}. \quad (7)$$

Здесь R_q – среднее квадратичное отклонение ординат профиля; L – характерная длина (в расчетах авторы работы [4] приняли $L = 1$ в мм); R – радиус индентора; функция $\zeta(H) = 1,7/(H+1)$.

Показатель Херста H связан с фрактальной размерностью соотношением $H = 2-D$. Сравнительную оценку величин F_{tr} , полученных разным способом (выражения 6 и 7), произведем при следующих одинаковых данных: $R = r' = 0,5$ мм; $HR_q = 9 \cdot 10^{-3}$ мм; $E' \cong 10^5$ МПа; $\zeta(H)=1$.

Заключение

Таким образом, анализ контактного взаимодействия показывает, что при разном параметре шероховатости податливость стыка падает с ростом нагрузки (увеличении сближения). Податливость при одних и тех же условиях растёт с

[7, 8] на основании совместного решения двух уравнений имеет вид

Роров), в которой нагрузка перехода выражается зависимостью

Расчет по Порту и Попову дает $F_{tr} = 2,45$ Н, по предлагаемой методике при этих же условиях имеем $F_{tr} = 5,14$ Н.

Разница, на наш взгляд, обусловлена тем, что в подходе Порты и Попова условно принято значение $L=1$. Если принять соотношение $L = \sqrt{A_a}$, где A_a – номинальная площадь, равная $0,64$ мм² и $L=0,8$ мм, то нагрузка перехода увеличится до $F_{tr} = 3,51$ Н.

уменьшением параметра шероховатости и увеличением фрактальной размерности D . Установлено условие перехода от фрактальной модели к моделям, основанным на теории Герца (в частности, к модели Гринвуда-Вильямсона).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the royal society A*. 1966. V. 295(1442). P. 300-319.
2. Маджумдар А., Бхушан Б. Фрактальная модель упругопластического контакта шероховатых поверхностей. *Современное машиностроение. Сер. Б*. 1991. №6. С.11-23.
3. Xu, K., Yuan Y., Chen J. The effects of size distribution functions on contact between fractal rough surfaces. *Aip advances* 8. 2018. V. 075317. P. 1-14.
4. Pohrt R., Popov V.L. Contact mechanics of rough spheres: crossover from fractal to hertzian behaviors. *Hindawi publishing corporation advances in tribology*. 2013. V. 974178. P. 1-4.
5. Kuo X., Yuan Y., Jianjiang C. The effects of size distribution functions on contact between fractal

- rough surfaces. *AIP Advances* 8. 2018. V. 075317. P. 1-14.
6. Hanaor D.A., Gan Y., Einav I. Static friction at fractal interfaces. *Tribology International*. 2016. V. 93. P. 229-238.
7. Jackson R.L., Streater J.L. A multiscale model for contact between rough surfaces. *Wear*. 2006. V. 261(1112). P. 1337-1347.
8. Jackson R.L., Green I. A statistical model of elastoplastic asperity contact between rough surfaces. *Tribology international*. 2006. V. 9(39). P. 906-914.
9. Yan W., Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces. *Journal of applied physics*. 1998. V. 84(7). P. 3617.

1. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the royal society A*. 1966. V. 295(1442). P. 300-319.

2. Majumdar A., Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact of rough surfaces. *Sovremennoe Mashinostroenie. Ser. B*. 1991. no.6. pp.11-23.

3. Xu, K., Yuan Y., Chen J. The effects of size distribution functions on contact between fractal rough surfaces. *Aip advances* 8. 2018. V. 075317. P. 1-14.
4. Pohrt R., Popov V.L. Contact mechanics of rough spheres: crossover from fractal to hertzian behaviors. *Hindawi publishing corporation advances in tribology*. 2013. V. 974178. P. 1-4.
5. Kuo X., Yuan Y., Jianjiang C. The effects of size distribution functions on contact between fractal rough surfaces. *AIP Advances* 8. 2018. V. 075317. P. 1-14.
6. Hanaor D.A., Gan Y., Einav I. Static friction at fractal interfaces. *Tribology International*. 2016. V. 93. P. 229-238.
7. Jackson R.L., Streater J.L. A multiscale model for contact between rough surfaces. *Wear*. 2006. V. 261(1112). P. 1337-1347.
8. Jackson R.L., Green I. A statistical model of elasto-plastic asperity contact between rough surfaces. *Tribology international*. 2006. V. 9(39). P. 906-914.
9. Yan W., Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces. *Journal of applied physics*. 1998. V. 84(7). P. 3617.

Информация об авторах:

Тихомиров Виктор Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры «Трубопроводные транспортные системы» Брянского государственного технического университета., тел.: 8 (4832) 41-98-90.

Измеров Михаил Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Трубопроводные

Tikhomirov Viktor Petrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Pipeline Transport Systems at Bryansk State Technical University, phone: 8(4832)41-98-90.

Izmerov Mikhail Aleksandrovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the De-

partment of Pipeline Transport Systems at Bryansk State Technical University, tel.: 8-952-960-17-19.

Тихомиров Пётр Викторович, кандидат технических наук, доцент, проректор по НИД Брянского государственного инженерно-технологического университета, тел.: 8-910-339-39-88.

partment of Pipeline Transport Systems at Bryansk State Technical University, phone: 8-952-960-17-19.

Tikhomirov Pyotr Viktorovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Research at Bryansk State University of Engineering and Technology, phone: 8-910-339-39-88.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 13.09.2021; одобрена после рецензирования 15.10.2021; принята к публикации 18.02.2022. Рецензент – Алгабачиев А.Ю., доктор технических наук, профессор, заведующий отделом Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, член редсовета журнала «Транспортное машиностроение».

The article was submitted to the editorial office on 13.09.2021; approved after review on 15.12.2021; accepted for publication on 18.02.2022. The reviewer is Algabachiev A.Yu., Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of the Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, member of the Editorial Board of the journal *Transport Engineering*.