

УДК: 539.3

DOI: 10.30987/2658-3488-2019-2019-4-12-16

М.В. Жигалов, В.А. Апрыскин, В.А. Крысько

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАНОБАЛОК

В статье построена математическая модель размерно-зависимого поведения линейной балки Бернулли на основе градиентной теории деформаций. Проведено исследование нелинейной динамики контактного взаимодействия. Исследована синхронизация колебаний на основе вейвлет-анализа.

Ключевые слова: балка Бернулли-Эйлера, размерно-зависимое поведение, градиентная теория упругости, синхронизация колебаний.

M.V. Zhigalov, V.A. Apryskin, V.A. Krysko

INVESTIGATION OF NANOBEAM CONTACT INTERACTION SYNCHRONIZATION

The paper presents a mathematical model of the size-dependent behavior of a linear Bernoulli beam based on the gradient deformation theory. The study of nonlinear dynamics of contact interaction is carried out. The synchronization of oscillations on the basis of wavelet analysis is investigated.

Keywords: Bernoulli-Euler beam, size-dependent behavior, gradient theory of elasticity, synchronization of oscillations.

Введение

Многослойные структуры из балок соединенные через краевые условия являются составными элементами полноразмерных конструкций в космическом, авиа-, судо- и приборостроении, а так же нано размерных элементов нанoeлектромеханических систем, которым приходится работать в экстремальных режимах работы. Поэтому важно изучение влияния управляющих параметров, величины внешней нагрузки на их функционирование.

Впервые задача о контакте упругих тел, первоначально соприкасающимися в точке была сформулирована и решена Г.Герцем [1] в 1882. Развитие техники поставило проблему контактных задач в ряд актуальных в механике деформируемого твердого тела. Сложность этих задач обусловило большое число подходов и математических методов при их решении. Принимая во внимание различные условия контакта, связанные с более сложными законами поведения, приводят к внедрению новых и нестандартных моделей, выражаемых с помощью эволюционных вариационных неравенств. Современное состояние исследований зарубежных ученых по данному вопросу можно найти в [2]. В работе [3] рассмотрена контактная задача без трения для конструкции, состоящей из двух балок Бернулли – Эйлера с различными длинами и различными переменными толщинами. Один конец короткой балки заземлен; совпадающий с ним конец длинной балки закреплен шарнирно. Второй конец каждой балки свободен. К длинной балке приложена заданная нагрузка. Под действием этой нагрузки балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием, то есть имеется односторонний контакт. В статье [4] представлены результаты использования методов теории оболочек для решения задач определения напряженно-деформированного состояния и долговечности тонкостенных конструкций. Показано, что одной из разновидностей задач для оболочек, которые часто встречаются при расчете различных технических объектов, являются задачи с подвижными границами – контактные задачи. В статье рассмотрен один из эффективных способов решения контактных задач для оболочек вращения – метод виртуальных элементов. В отличие от метода конечных элементов

увеличение количества виртуальных элементов не увеличивает размер матрицы жесткости конструкции. Исследованию контактного взаимодействия нано балок и нано пластин по модифицированной моментной теории посвящены работы [5-7].

1. Постановка проблемы

Основываясь на теории напряжений более высокого порядка Mindlin[7] и Lametal. [8] построена математическая модель нано балок Бернулли-Эйлера, соединенных через краевые условия, под действием поперечной нагрузки. Для учета размерных эффектов вводятся три параметра шкалы длины материала (l_0, l_1, l_2) . Для учета контакта между балками, используется винклерова связь между обжатием и контактным давлением между двумя балками [9]:

$$\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)] \quad (1)$$

где $\Psi = 1$, если $W_1 > w_2 + h_k$ то есть имеется контакт между пластиной и балкой, иначе $\Psi = 1$.

Математическая модель контакта двух нано балок, на основе кинематической гипотезы Бернулли-Эйлера, описывается системой разрешающих уравнений:

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \left((\lambda + 2\mu) \frac{bh^3}{12} + l_0^2 \mu bh + l_2^2 \mu bh + \frac{96}{225} l_1^2 \mu bh \right) - \frac{\partial^6 w_m}{\partial x^6} \left(2l_0^2 \mu \frac{bh^3}{12} + \frac{14}{225} l_1^2 \mu \frac{bh^3}{12} \right) - q_m + (-1)^m K(w_1 - w_2 - \tilde{h})\Psi = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2)$$

где m – номер балки ($m=1,2$), \tilde{h} – зазор между балками. Система (2) с помощью соотношений:

$$\bar{w} = w/(2h), \quad \bar{u} = ua/(2h)^2, \quad \bar{x} = x/a, \quad \lambda = a/(2h), \quad \bar{q} = (qa^4)/(2h)^4 E, \quad (3)$$

$$\bar{t} = t/\tau, \quad \tau = a/c, \quad c = \sqrt{Eg/9}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon a/c,$$

сводится к безразмерному виду. Граничные условия имеют вид:

$$w_m = 0; \quad \frac{\partial w_m}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия имеют вид:

$$w_m(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w_m(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Система (2, 4,5) сводилась к задаче Коши с помощью метода конечных разностей $O(h^2)$. Задача Коши решалась методом Рунге-Кутта 4 порядка. Проведено исследование сходимости по методу конечных разностей, на основании которого выбрано оптимальное количество разбиений. Шаг разбиений для метода Рунге-Кутта определялся по принципу Рунге.

Получаемые в результате решения динамической задачи, описанный выше, значения $w(x,t)$, анализируются методами качественной теории дифференциальных уравнений и нелинейной динамики: строятся фазовые портреты, спектры мощности, полученные с помощью быстрого преобразования Фурье, энергетические спектры вейвлетного преобразования в зависимости от времени и масштабного параметра в двумерном пространстве, разность фаз - для анализа режима фазовой хаотической синхронизации.

Применение вейвлет-преобразования хаотического сигнала $w_i(t)$ рассматриваемой механической системы, характеризуемого плохой определемостью фазы, дает возможность разработать новый метод выявления фазовой синхронизации. Запишем вейвлетную поверхность $W(s, t) = |W(s, t)| e^{i\phi_s(t)}$, которая характеризует поведение механической системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t . Введем так же интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам $E(s) = \int |W(s, t)|^2 dt$. Использование вейвлетного преобразования дает возможность вычислить фазу $\phi_s(t) = \arg W(s, t)$ для каждого временного масштаба s , т.е. возможно характеризовать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы. Следует отметить, что фазовая синхронизация означает, что происходит захват хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы $\langle \phi(t) \rangle$. Синхронизированными оказываются те временные масштабы, на которые приходятся наибольшие доли энергии $E(s)$. Остальные временные масштабы по-прежнему остаются несинхронизированными. При этом, фазовая синхронизация ведет к появлению и захвату фаз на синхронизированных временных масштабах $s: |\phi_1 - \phi_2| < const$, здесь ϕ_1, ϕ_2 - непрерывные фазы 1 и 2 балки, соответствующие синхронизированным временным масштабам s . В численных примерах графически эти зоны отмечаются черным цветом.

2. Численные результаты

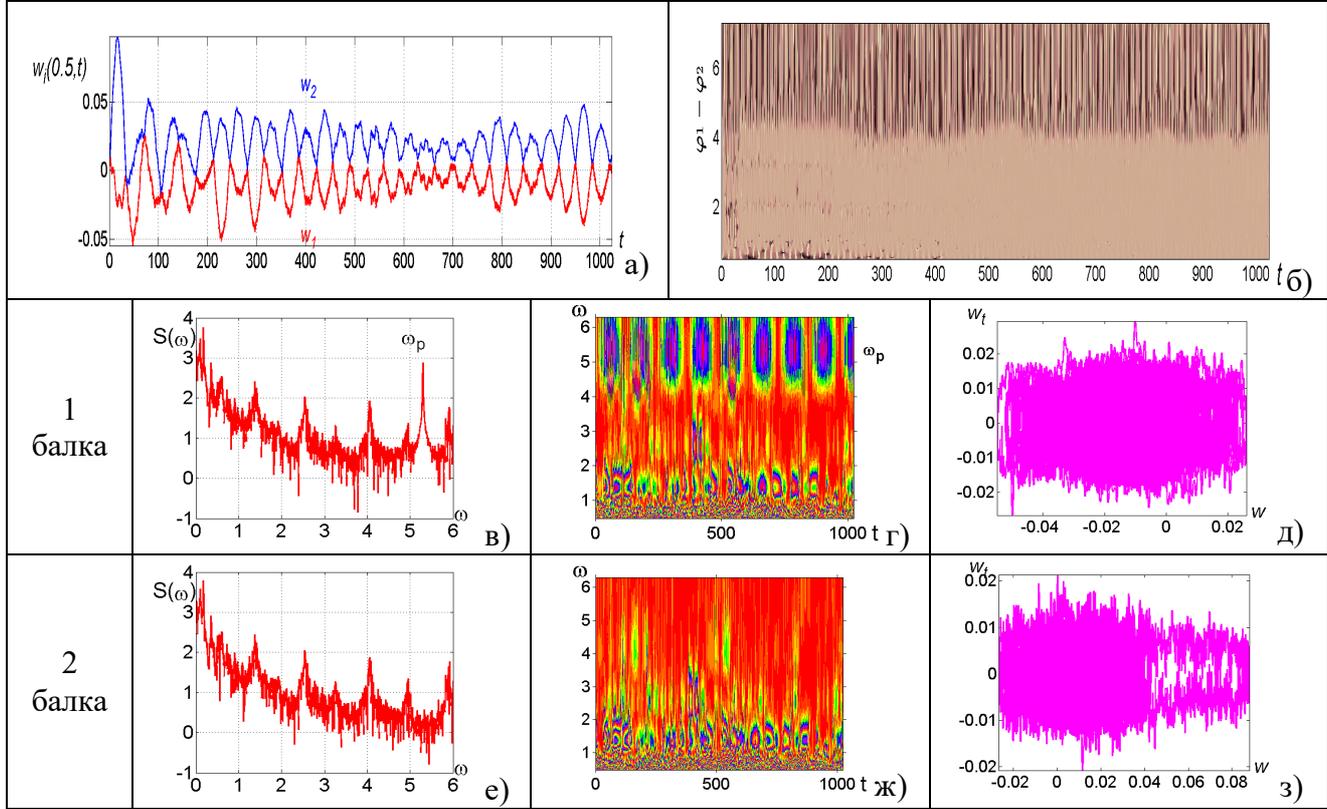
Для рассмотренных задач использовались следующие значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $\tilde{h} = 0.01$, $q_1 = 300 \sin(5.3 \cdot t)$, $q_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.3$.

В таблице 1 представлены результаты исследований для случая когда все безразмерные параметры $t \approx 400$ равны 0.3. Приведены следующие характеристики колебаний: ф) сигналы 1 и второй балок; б) фазовая хаотическая синхронизация колебаний; в) и е) спектры Фурье для 1 и 2 балок соответственно; г) и ж) 2Двейвлет спектры на базе вейвлета Морле; д) и з) фазовые портреты.

График сигналов показывает, что балки контактируют на всем временном интервале и начиная со времени $t \approx 350$ сигналы имеют зеркальный вид. Таким образом энергии колебаний обеих балок равны. На это указывает и график фазовой хаотической синхронизации – начиная с этого времени синхронизация (темный цвет) происходит на частоте возбуждения. До момента времени синхронизация колебаний происходила на более широком диапазоне частот и как показывают вейвлет спектры (г и ж) энергия первой балки существенно больше чем энергия второй. Спектр Фурье обоих балок показывает, что колебания первой и второй балок существенно хаотичны, но энергия имеет «пики» на одних и тех же частотах: $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 1.2$, $\omega_3 = 2.3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$. Вейвлет спектр второй балки указывает на то, что наибольшее значение энергии колебаний (соответствующая квадрату вейвлет коэффициентов $E(s) = \int |W(s, t)|^2 dt$) сосредоточено на низких частотах $\omega \leq 3$. На более высоких частотах имеются одномоментные всплески активности, соответствующие переходным процессам, хорошо заметным на графике сигналов а). Вид фазовых портретов для обеих балок несимметричен относительно нуля по оси w и имеет сдвиг для первой балки в сторону отрицательных прогибов, а для второй в сторону положительных прогибов, что указывает опять же на симметричность колебаний балок. Отметим интересную особенность колебательного процесса. В момент времени $t \approx 400$ на вейвлет спектре обеих балок на

частотах $2 < \omega < 3.5$ происходит всплеск энергии, который приводит к усложнению сигнала, т.е. его вид становится более хаотичным – это видно графике сигналов а). После $t \approx 850$ сигнал становится более стабильным. Хотя колебания так же остаются хаотическими.

Таблица 1. Характеристики нелинейной динамики контактного взаимодействия нано балок Бернулли-Эйлера



Выводы

В работе построена математическая модель контактного взаимодействия нанобалок Бернулли-Эйлера на основе градиентной теории упругости. Проведено исследования динамики при одном значении трех параметров шкалы длины материала. Выявлены интересные особенности контактного взаимодействия нано балок. Изучение фазовой хаотической синхронизации выявило связь между всеми характеристиками колебаний (Фурье и вейвлет спектры, фазовый портрет и сигнал) и фазовой синхронизацией. Это позволяет сделать вывод о необходимости дальнейших углубленных исследований в области фазовой хаотической синхронизации контактного взаимодействия нано балок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 16-11-10138-П.

Список литературы:

1. Hertz H. Gesammelte Werke. Bd. 1. Leipzig, 1895.
2. Banks H. T., Hu S., Kenz Z. R. A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids // Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2011. 3(1). P. 1-51
3. Осипенко М.А., Касаткин А.А. Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.

References:

1. Hertz, H. Gesammelte Werke. Bd. 1. Leipzig, 1895.
2. H. T. Banks, S. Hu, Z. R. Kenz, A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids // Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2011. 3(1). P. 1-51
3. Osipenko M. A., Kasatkin A. A. torque load at the contact unilateral contact beams // proceedings of the Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2019. T. 19. No. 1. Pp. 69-81.

2019. Т. 19. № 1. С. 69-81.

4. Emelyanov I. G. Mechanics of shells and its applications // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2018. 2. P. 6–28.
5. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A., Krysko A.V., Chaotic contact dynamics of two microbeams under various kinematic hypotheses // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2019. 20(3-4). P. 373-386
6. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko A.V., On the contact interaction of a two-layer beam structure with clearance described by kinematic models of the first, second and third order approximation. Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. 115. P.°696-719
7. Mindlin RD. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. Int J Solids Struct. 1965;1:417-38.
8. Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int J Solids Struct. 2002;39:2731-43.
9. Кантор Б.Я. Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек / Б.Я. Кантор, Т.Л. Богатыренко // Докл. АН УССР.сер. А. 1986. №1. С.18-21.

4. Emelyanov I. G. Mechanics of shells and its applications // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2018. 2. P. 6-28.
5. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko A.V., Chaotic contact dynamics of two microbeams under various kinematic hypotheses / International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2019. 20(3-4). P. 373-386
6. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Saltykova O. A., Papkova I. V., Krysko A.V., On the contact interaction of a two-layer beam structure with clearance described by kinematic models of the first, second and third order approximation. Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. 115. P.°696-719
7. Mindlin RD. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. Int J Solids Struct. 1965;1:417-38.
8. Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int J Solids Struct. 2002;39:2731-43.
9. Kantor B. ya. Method for solving contact problems of nonlinear shell theory / B. Ya. Kantor, T. L. Bogatyrenko // Dokl. UKRAINIAN ACADEMY OF SCIENCES. ser. A. 1986. No. 1. Pp. 18-21.

Статья поступила в редколлегию 10.10.19.

*Рецензент: д.т.н., доцент,
Брянский государственный технический университет
Захарова А.А.*

Статья принята к публикации 10.11.19.

Сведения об авторах:

Жигалов Максим Викторович

д.ф.-м.н., доцент
профессор кафедры «Математика и моделирование» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина»
Тел.: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: zhigalovm@yandex.ru

Апрыскін Виктор Александрович

магистр кафедры «Математика и моделирование» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина»
Тел.: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: wwoow@yandex.ru

Крысько Вадим Анатольевич

д.т.н., профессор
заведующий кафедрой «Математика и моделирование» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина»
Тел.: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: anton.krysko@gmail.com

Information about authors:

Zhigalov Maxim Viktorovich

Doctor of physical-mathematical science, associate Professor
Professor of the Department «Mathematics and modeling» FSBEI HE «Yuri Gagarin State Technical University of Saratov»
Phone: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: zhigalovm@yandex.ru

Apryskin Victor Alexandrovich

master of Department «Mathematics and modeling», FSBEI HE «Yuri Gagarin State Technical University of Saratov»
Phone: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: wwoow@yandex.ru

Krysko Vadim Anatolievich

Doctor of Technical Sciences, Professor
Head of the department "Mathematics and modeling" FSBEI HE «Yuri Gagarin State Technical University of Saratov »
Phone: +7 (8452) 99-87-24
E-mail: kryskovadim@gmail.com