

УДК 62.752, 621:534.833; 888.6  
DOI: 10.12737/24954

С. В. Елисеев, В.Б. Кашуба, А.В. Николаев, К.Ч. Вьонг

## НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Предлагается метод динамического гашения колебаний в механических колебательных системах с несколькими степенями свободы. Математическая модель системы представлена в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Показаны возможности изменения динамических свойств системы при использовании рычажных механизмов и дополнительных связей в виде зубчатых соединений элементов системы. Предложен метод построения математических моделей и технология анализа динамических свойств при кинематическом возбуждении системы. Предлагается

система оценки динамических свойств системы в режимах динамического гашения колебаний одновременно по двум координатам на основе использования передаточных функций и анализа структурных схем. Приводятся результаты вычислительного моделирования, подтверждающие проявления эффектов динамического блокирования внешних воздействий.

**Ключевые слова:** динамическое гашение колебаний, передаточные функции, рычажные связи, рычажные механизмы, блокирование возмущений.

S.V. Eliseev, V.B. Kashuba, A.V. Nikolayev, K.Ch. Vyong

## SOME POSSIBILITIES OF DYNAMICAL VIBRATION DAMPING IN SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM

A method of dynamic vibration damping in mechanical oscillatory systems with several degrees of freedom is offered. The mathematical model of the system is represented in the form of structural scheme the equivalent in a dynamic relation to the automatic control system. The system contains device for converting the motion in the form of lever mechanisms containing focused additional masses. The possibilities of changing the dynamic properties of the system by using lever mechanisms and the additional ties in the form of gear connections of the elements system are shown. A method of constructing mathematical models

and technology analysis of dynamic properties at kinematic excitation of system is proposed. The system of evaluation of the dynamic properties of the system in regimes of dynamic vibration damping simultaneously on two coordinates based on the use of transfer functions and analysis of structural scheme is offered. The results of computational modeling are given, confirming the manifestation the effects of dynamic blocking of external influences.

**Keywords:** dynamic vibration damping, transfer functions, lever ties and mechanisms, blocking of disturbances.

### Введение

Механические колебательные системы с несколькими степенями свободы часто используются в качестве расчетных схем в задачах вибрационной защиты в технологических машинах и транспортных устройствах различного назначения [1-4]. В работах, посвященных вопросам теории виброзащитных систем [5-7], предлагаются различные подходы и методы динамического синтеза в решении разнообразных задач, учитывающих конструктивно-технические особенности систем и объектов. В последние годы существенное развитие получили структурные методы математического моделирования динамических процессов, основанные на использо-

вании математического аппарата теории систем, теории цепей и автоматического управления. Современные виброзащитные системы, по-существу, приближаются по своим функциональным возможностям к системам автоматического управления и содержат в своем составе широкий набор технических средств, представленных рычажными механизмами и устройствами для преобразования движения. В этом отношении большим разнообразием отличаются системы рессорного подвешивания транспортных средств, виброзащитные системы и комплексы для защиты оборудования и приборов [7; 10-12].

Принципиальное значение в развитии методологического базиса теории и практики вибрационной защиты приобретают направления исследований, связанные с оценкой возможностей расширения набора типовых элементов систем, введением дополнительных связей и механизмов для управления динамическим состоянием объектов защиты от вибрационных нагрузок [8; 13-15]. В этом плане интерес представляет разработка подходов, ориентированных на детализацию представлений о

динамическом гашении колебаний, в которых задействованы процессы по нескольким координатам.

В предлагаемой статье развивается методологическая основа построения математических моделей виброзащитных систем с возможностями формирования оценок и корректировки динамических свойств виброзащитных систем, обладающих пространственными геометрическими параметрами.

### Описание подхода. Постановка задачи исследования

Рассматривается принципиальная схема подвески для виброзащиты прибора от внешних возмущений со стороны опорной поверхности. Использование систем с двумя степенями свободы в решении задач формирования вибрационных полей распределением амплитуд колебаний отдельных точек по длине объекта имеет определенные преимущества. Ряд вопросов динамики виброзащитных систем с дополнительными связями рассмотрен в работах [8; 9; 16]. Рассматриваемая система (рис. 1) содержит рычажные механизмы, соединенные между собой зубчатой передачей, имеющей две неподвижные точки опоры ( $O_1$  и  $O_2$ ).

Виброзащитная платформа (рис. 1) с массой  $M_0$ , моментом инерции  $J_0$  может совершать малые колебания с тремя степенями свободы в координатах  $y_0$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  (или  $\varphi_2$ ), а также  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y'_1$  (или  $y'_2$ ). Массоинерционные элементы  $m_1$ ,  $m_2$ , так же как сосредоточенные массы  $m'_1$  и  $m'_2$ , являются составными частями зубчатых секторов, совершающих угловые колебательные движения относительно центров в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Радиусы зубчатых секторов определяются значениями  $r_1$  и  $r_2$ ; через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  обозначают числа зубьев соответствующих зубчатых секторов. Сосредоточенные массы  $m'_1$  и  $m'_2$  расположены на расстояниях  $l_2$  и  $l_3$  относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ . Центр тяжести платформы расположен в точке  $O$  на расстояниях  $l_5$  и  $l_6$  по отношению к точкам крепления упругих элементов с жесткостями  $k_2$  и  $k_3$  соответственно. Платформа через упругие элементы с жесткостями  $k_1$  и  $k_4$  опирается на опорные

поверхности I, II, которые могут колебаться по гармоническим законам  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  соответственно. Предполагается, что в системе реализуются малые колебания относительно положения статического устойчивого равновесия, а система в целом обладает линейными свойствами при исчезающе малых силах сопротивления. Массоинерционные параметры устанавливаемого оборудования учитываются в значениях  $M_0$  и  $J_0$ . В качестве настроечных параметров управления динамическим состоянием рассматриваются длины  $l_2$ ,  $l_3$  рычагов, определяющих связи с массоинерционными элементами  $m'_1$  и  $m'_2$ . Взаимные

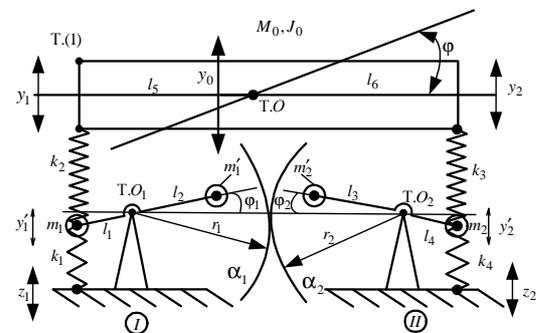


Рис. 1. Принципиальная схема системы

движения элементов  $m'_1$  и  $m'_2$  обеспечиваются вращением зубчатых секторов относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ .

Задача исследования заключается в развитии методологических основ построения математических моделей для систем, содержащих в своей структуре рычажные механизмы и устройства для преобразования движения, с целью разработки способов и средств управления динамическим состоянием вибрационных систем.

**Построение математической модели системы**

При построении математической модели учитывается ряд соотношений:

$$y_0 = ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 - l_5\varphi, y_2 = y_0 + l_6\varphi, \tag{1}$$

где  $a = l_6 / (l_5 + l_6)$ ;  $b = l_5 / (l_5 + l_6)$ ;  $c = 1 / (l_5 + l_6)$ .

Построение математической модели проводится в соответствии с основными положениями структурного математического моделирования [6; 8; 9].

1. Рассматриваются движения системы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$ ; учитываются связи между параметрами упругой системы подвешивания платформы:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = i_1, \varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2, \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, i_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \varphi_1 = \frac{y'_1}{l_1}, \varphi_2 = \frac{y'_2}{l_4}, y'_1 = l_1 \varphi_1, \\ y'_2 = l_4 \varphi_2, \frac{y'_2}{y'_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot \frac{l_4}{l_1}, \frac{l_4}{l_1} = i_2, \frac{y'_2}{y'_1} = i_1 i_2, i = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{l_4}{l_1} = \frac{y'_2}{y'_1}, i'_1 = \frac{l_2}{l_1}, i'_2 = \frac{l_3}{l_4}. \end{aligned} \tag{2}$$

После проведения соответствующих выкладок, связанных с использованием уравнения Лагранжа второго рода, полу-

чим систему дифференциальных уравнений

$$(M_0 a^2 + J_0 c^2) \cdot \ddot{y}_1 + y_1 k_2 + (M_0 ab - J_0 c^2) \cdot \ddot{y}_2 - k_2 y'_1 = 0, \tag{3}$$

$$(M_0 b^2 + J_0 c^2) \cdot \ddot{y}_2 + y_2 k_3 + (M_0 ab - J_0 c^2) \cdot \ddot{y}_1 - k_3 i y'_1 = Q, \tag{4}$$

$$m_0 \cdot \ddot{y}'_1 + y'_1 (k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2) - k_2 y_1 - k_3 i y'_2 = 0. \tag{5}$$

Применяя преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях [6], систему уравнений (3-5) можно записать в

операторной форме. Коэффициенты уравнений для такого случая приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений (3-5) в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  при силовом возмущении

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(M_0 a^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_2$	$(M_0 ab - J_0 c^2) \cdot p^2$	$-k_2$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(M_0 ab - J_0 c^2) \cdot p^2$	$(M_0 b^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_3$	$-k_3 i$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-k_2$	$-k_3 i$	$m_0 \cdot p^2 + (k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2)$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$
$\bar{Q}$	0	0

Примечание.  $p = j\omega$  – комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ); знак «→» соответствует изображению переменной по Лапласу;  $m_0 = m_1 + m'_1 (i'_1)^2 + m_2 i_2^2 + m'_2 (i'_2)^2$ .

В (3-5) полагается, что внешнее возмущение имеет силовой вид и представлено силой  $Q$ , приложенной в точке 1 (рис.1). Полагаем, что внешнее возмущение имеет вид сосредоточенной силы  $\bar{Q}$ ,

отнесенной к координате  $y_1$  точки 1 на рис. 1. Для описания связей между приложенными силами и координатами воспользуемся формулами Крамера [17]:

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{Q}(a_{22} a_{33} - a_{23}^2)}{A_0}, \tag{6} \quad \bar{y}_2 = \frac{\bar{Q}(a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33})}{A_0}, \tag{7} \quad \bar{y}_3 = \frac{\bar{Q}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})}{A_0}, \tag{8}$$

где

$$A_0 = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{31} - a_{33} a_{12} a_{21} - a_{22} a_{13} a_{31} + 2 a_{12} a_{23} a_{31} \tag{9}$$

является характеристическим уравнением системы (значения  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$  приведены в табл. 1).

2. Структурная схема системы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  при силовом возмущении  $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$  приведена на рис. 2.

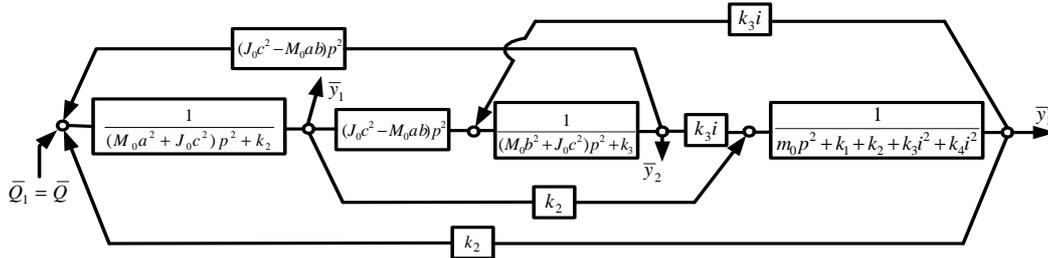


Рис. 2. Структурная схема системы при силовом возмущении

Как следует из рис. 2, система состоит из трех парциальных блоков с передаточными функциями

$$W_1'(p) = \frac{1}{(M_0 a^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_2}, \quad (10) \quad W_2'(p) = \frac{1}{(M_0 b^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_3}, \quad (11)$$

$$W_3'(p) = \frac{1}{m_0 \cdot p^2 + k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2}. \quad (12)$$

Между парциальными системами (10) и (11) имеется инерционная связь с передаточной функцией

$$W_{12}(p) = (J_0 c^2 - M a b) \cdot p^2, \quad (13)$$

для парциальных систем (10) и (12) реализуется межпарциальная упругая связь с передаточной функцией

$$W_{13}(p) = k_2. \quad (14)$$

Между парциальными системами (11) и (12) образуется упругая связь с передаточной функцией

$$W_{23}(p) = k_3 i. \quad (15)$$

Передаточное отношение  $i$  входит также в структуру передаточной функции парциальной системы (12), что создает определенные возможности в реализации задач вибрационной защиты [6].

3. Запишем уравнение движения при силовом возмущении  $\bar{Q}_1 \neq \bar{Q}$  ( $z_1 = 0, z_2 = 0$ )

в системе координат  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ). Используя соотношения  $y_0 = a y_1 + b y_2$ ,  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ,  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = i_1$ , можно найти выражения для кинетической и потенциальной энергий. Сделав соответствующие преобразования, получим систему дифференциальных уравнений движения в координатах  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  при действии внешнего силового фактора  $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$ . При переходе от системы координат  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  к системе координат  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  обобщенные силы соответствующим образом изменяются [6; 18]. Применяем преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях. Коэффициенты уравнений движения в координатах  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  в операторной форме приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты уравнений (3-5) в координатах  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  при силовом возмущении

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$M_0 p^2 + k_2 + k_3$	$-k_2 l_5 + k_3 l_6$	$-k_2 l_1 - k_3 l_4 i_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_2 l_5 + k_3 l_6$	$J_0 p^2 + k_2 l_5^2 + k_3 l_6^2$	$k_2 l_1 l_5 - k_3 l_4 l_6 i_1$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-k_2 l_1 - k_3 l_4 i_1$	$k_2 l_1 l_5 - k_3 l_4 l_6 i_1$	$m_1 l_1^2 + m_1' l_2^2 + m_2 (l_4 i_1)^2 + m_2' (l_3 i_1)^2 + k_2 l_1^2 + k_1 l_1^2 + k_3 (l_4 i_1)^2 + k_4 (l_4 i_1)^2$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_{y_0}$	$\bar{Q}_\varphi$	$\bar{Q}_{\varphi_1}$

Определение обобщенных сил в координатной системе  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  при известных внешних нагрузениях в системе координат  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  приводит к следующим результатам:

$$\bar{Q}_{y_0} = \bar{Q} = \bar{Q}_{y_1}, \bar{M}_\varphi = \bar{Q}l_1, \bar{M}_{\varphi_1} = 0. \quad (16)$$

Отметим, что внешние силы  $\bar{Q}_{y_0}$  и  $\bar{M}_\varphi$  должны быть локализованы на входах соответствующих парциальных систем. Структурная схема системы в координатах  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$  приведена на рис. 3.

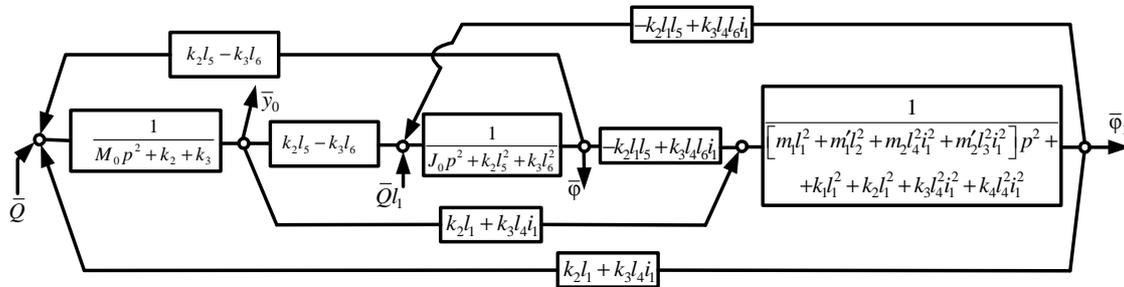


Рис. 3. Структурная схема системы в координатах  $y_0, \varphi$  и  $\varphi_1$

Передаточные функции системы при двух входных сигналах (16) могут быть определены на основе принципа суперпо-

зиции с применением формулы Крамера [17]. В частности, передаточные функции принимают вид

$$W_1''(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + l_1(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})}{A'_0}. \quad (17)$$

В свою очередь,

$$W_2''(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{Q}} = \frac{(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + l_1(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{A'_0}, \quad (18)$$

$$W_3''(p) = \frac{\bar{\varphi}_1}{\bar{Q}} = \frac{(a_{21}a_{23} - a_{22}a_{31}) + l_1(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{23})}{A'_0}. \quad (19)$$

где

$$A'_0 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{22}a_{13}a_{31} + 2a_{12}a_{23}a_{31}. \quad (20)$$

Здесь  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$  определяются из табл. 2.

Таким образом, силовое воздействие  $Q$ , приложенное в точке 1 (рис. 1), вызывает движение по координатам  $y_0, \varphi$ . В этом случае имеет смысл рассматривать возможности определения параметров дина-

мического гашения колебаний и возникновения совместных движений элементов. Аналогичным образом определяются, в случае необходимости, параметры движения по координатам  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ), если такие данные нужны для расчетов элементов подвески на прочность.

### Особенности кинематического возмущения

При известных гармонических движениях основания  $z_1(t), z_2(t)$  с одинаковой частотой возмущения передаточные функции системы могут быть получены путем использования принципа суперпозиции.

1. Абсолютное движение элементов механической колебательной системы рассматривается в этом случае как результат

суммирования относительного и переносного движений (движение опорных поверхностей I, II (рис. 1) считается переносным).

В табл. 3 приведены коэффициенты уравнений движения системы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  в операторной форме.

Таблица 3

Коэффициенты уравнений движения системы при кинематическом возмущении в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(M_0 a^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_2$	$(M_0 ab - J_0 c^2) \cdot p^2$	$-k_2$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(M_0 ab - J_0 c^2) \cdot p^2$	$(M_0 b^2 + J_0 c^2) \cdot p^2 + k_3$	$-k_3 i$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-k_2$	$-k_3 i$	$(m_1 + m'_1 i_1'^2 + m_2 i^2 + m'_2 i^2 i_2'^2) p^2 + k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_1''$	$\bar{Q}_2''$	$\bar{Q}_3''$
$k_2 \bar{z}_1$	$k_3 \bar{z}_2$	$[-(m_1 - m'_1 i_1') p^2 - k_2] \cdot \bar{z}_1 + [-(m_2 - m'_2 i_2') p^2 - k_3] \cdot i \bar{z}_2$

Особый случай внешнего возмущения возникает при  $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ . Кинематическое возмущение трансформирует внешние силы к виду

$$\bar{Q}_1'' = k_2 \bar{z}, \quad \bar{Q}_2'' = k_3 \bar{z}, \quad \bar{Q}_3'' = (m_0'' p^2 - k_2 - k_3 i) \cdot \bar{z}, \quad (21)$$

где

$$m_0'' = -m_1 + m'_1 i_1' p^2 - (m_2 - m'_2 i_2') i. \quad (22)$$

2. Структурная схема системы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  (рис. 4) дает представление об особенностях формирования динамических взаимодействий между пар-

циальными блоками, их соединениями и внешними кинематическими воздействиями.

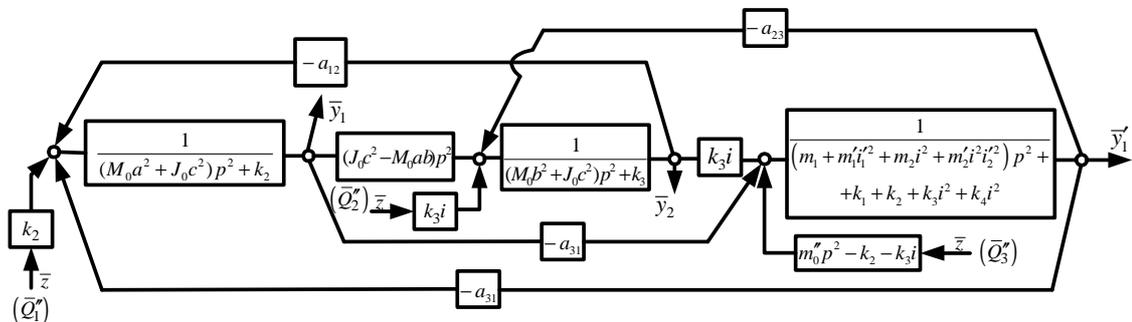


Рис. 4. Структурная схема системы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  при кинематическом возмущении ( $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ ):  $a_{12}, a_{23}, a_{31}$  определяются из табл. 3;  $m_0''$  определяется выражением (22)

В системе координат  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  при кинематическом возмущении внешнее воздействие одновременно возбуждает колебания по всем парциальным блокам. Отметим, что при воздействии по координате  $y'_1$  внешнее возмущение на частоте

$$\omega^2_{y'_1} = \frac{-(k_2 + k_3 i)}{m_0''}, \quad (23)$$

обнуляется (или блокируется). То есть при частоте, определяемой из (23), парциальная система  $y'_1$  изолируется от внешнего возмущения.

Особенности структурной схемы в координатах  $y_1, y_2$  и  $y'_1$  при кинематических возмущениях  $z_1(t), z_2(t)$  заключаются в том, что система в общем случае имеет три входных внешних сигнала, что приводит к необходимости использовать принцип суперпозиции при определении выходных сигналов. При  $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$  внешнее кинематическое возмущение также формирует три входных сигнала. Воспользуемся формулами Крамера, принимая, что  $Q_1'' = k_2 \bar{z}, Q_2'' = k_3 \bar{z}, Q_3'' = (m_0'' p^2 - k_2 - k_3 i) \cdot \bar{z}$ .

Внешняя сила по координате  $y'_1$  определяется выражением

$$Q''_{y'_1} = \bar{z} \cdot (m''_0 p^2 - k_2 - k_3 i), \quad (24)$$

где  $m''_0$  может быть найдено из (22) ( $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ ).

Передаточные функции системы при кинематическом воздействии имеют вид

$$W''_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + k_3(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + (m''_0 p^2 - k_2 - k_3 i) \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{A''_0}, \quad (25)$$

$$W''_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{k_2(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + k_3(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (m''_0 p^2 - k_2 - k_3 i) \cdot (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{A''_0}, \quad (26)$$

$$W''_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{k_2(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + k_3(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (m''_0 p^2 - k_2 - k_3 i) \cdot (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{A''_0}, \quad (27)$$

где  $A''_0 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{22}a_{13}a_{31} + 2a_{12}a_{23}a_{31}$ . (28)

Здесь  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$  определяются из табл. 3.

**Оценка динамических свойств**

Уравнения движения в координатах  $y_0, \varphi$  и  $y'_1$  принимают вид

$$M_0 \cdot \ddot{y}_0 + y_0(k_2 + k_3) + \varphi \cdot (-k_2 l_5 + k_3 l_6) - y'_1(k_2 + k_3 i) = k_2 z_1 + k_3 z_2, \quad (29)$$

$$J_0 \cdot \ddot{\varphi} + \varphi \cdot (k_2 l_5^2 + k_3 l_6^2) + y_0 \cdot (-k_2 l_5 + k_3 l_6) + y'_1(k_2 l_5 - k_3 l_6 i) = -k_2 l_5 z_1 + k_3 l_6 z_2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}'_1 \cdot (m_1 + m'_1 i'^2 + m_2 i^2 + m'_2 i'^2) + y'_1 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2) - y_0(k_2 + k_3 i) + \\ \varphi \cdot (k_2 l_5 - k_3 l_6 i) = -(m_1 - m'_1 i') \ddot{z}_1 - k_2 z_1 - i(m_2 - m'_2 i'_2) \ddot{z}_2 - k_3 i z_2 \end{aligned} \quad (31)$$

Коэффициенты уравнений движения в координатах  $y_0, \varphi$  и  $y'_1$  в операторной

форме при кинематическом возмущении приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты уравнений движения системы при кинематическом возмущении в координатах  $y_0, \varphi$  и  $y'_1$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$M_0 p^2 + k_2 + k_3$	$-k_2 l_5 + k_3 l_6$	$-(k_2 + k_3 i)$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_2 l_5 + k_3 l_6$	$J_0 p^2 + k_2 l_5^2 + k_3 l_6^2$	$k_2 l_5 - k_3 l_6 i$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-(k_2 + k_3 i)$	$k_2 l_5 - k_3 l_6 i$	$(m_1 + m'_1 i'^2 + m_2 i^2 + m'_2 i'^2) p^2 + k_1 + k_2 + k_3 i^2 + k_4 i^2$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_1''$	$\bar{Q}_2''$	$\bar{Q}_3''$
$k_2 z_1 + k_3 z_2$	$-k_2 l_5 z_1 + k_3 l_6 z_2$	$-(m_1 - m'_1 i') \cdot \ddot{z}_1 - k_2 z_1 - i(m_2 - m'_2 i'_2) \cdot \ddot{z}_2 - k_3 i z_2$
При $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ $(k_2 + k_3) \bar{z}$	При $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ $(-k_2 l_5 + k_3 l_6) \bar{z}$	При $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$ $(m''_0 p^2 - k_2 - k_3 i) \bar{z}$

Передаточные функции системы при кинематическом возмущении  $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$  представлены выражениями:



При этом принимается во внимание обстоятельство, что внешнее возмущение от движения основания приходится одновременно на все входы парциальных систем. По координате  $y_2$  (рис. 6 б) также можно зафиксировать две частоты динамического гашения. Что касается движений по координате  $y'_1$ , то, как это следует из (27), частот динамического гашения может быть получено три. Этот случай отдельно не рассматривается. Таким образом, исходная система (рис. 1) потенциально обладает возможностями получения режимов динамического гашения колебаний по два в координатах  $y_1, y_2$  и три - по координате  $y'_1$ , что сопровождается нетрадиционными возможностями трансформации амплитудно-частотных характеристик. Параметры механической колебательной системы в задаче вычислительного моделирования приведены в подрисуночной надписи к рис. 6.

Для амплитудно-частотных характеристик  $\bar{y}'_1/\bar{z}(\omega)$  на частотах  $\omega \rightarrow \infty$  наблюдается некоторый предел отношения выходного сигнала к входному. В свою очередь, при  $\omega \rightarrow 0$  также наблюдается определенное отношение амплитуд, получаемое из (25-27) при  $p \rightarrow 0$ .

2. Второй вид динамических режимов определяется возможностями одновременного обнуления координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  при определенных частотах. На рис. 7 показаны графики зависимостей  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$  и  $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$ , которые одновременно пересекают ось абсцисс на одной и той же частоте (точки 2 и 2').

3. Третий вид динамических режимов наблюдается при одновременном выполнении условий, когда  $k_2 \rightarrow \infty, k_3 \rightarrow \infty$ . В этом случае система (рис. 1) преобразуется

в систему с одной степенью свободы (рис. 8); при этом при  $\omega \rightarrow \infty$  отношение амплитуд колебаний  $\bar{y}'_1/\bar{z}$  определяется стационарным значением. Что касается отношений  $\bar{y}'_1/\bar{z}, \bar{y}'_2/\bar{z}$ , то они могут быть неодинаковыми из-за наличия связи, создаваемой зубчатой передачей.

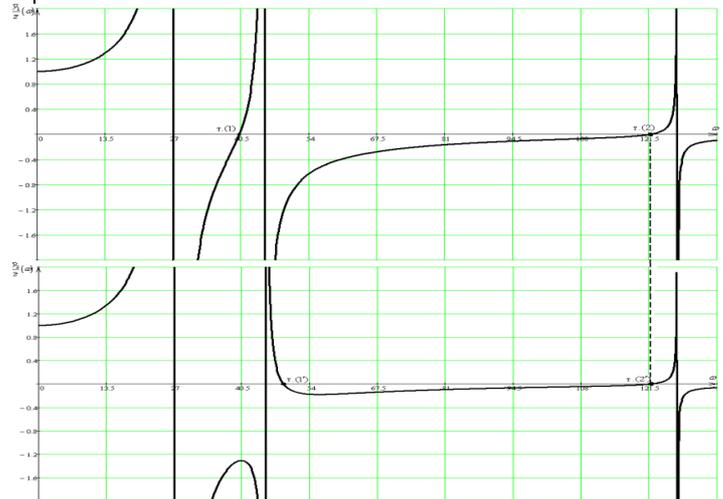


Рис. 7. Графики зависимостей  $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$  и  $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$  при условиях одновременного гашения колебаний  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  (параметры системы или расчета:  $M = 100$  кг,  $J = 25$  кгм<sup>2</sup>,  $a = 0,4$  м,  $b = 0,6$  м,  $k_1 = 60$  кН/м,  $k_2 = 100$  кН/м,  $k_3 = 100$  кН/м,  $k_4 = 80$  кН/м,  $i_1 = 1,5$ ,  $i_2 = 0,66667$ ,  $i'_1 = 0,40399$ ,  $i'_2 = 0,5$ ,  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 15$  кг,  $m'_1 = 10$  кг,  $m'_2 = 5$  кг)

Для практической реализации подобного рода эффектов необходима блокировка движений  $y_1 - y'_1$  и  $y_2 - y'_2$ , что может быть обеспечено установкой параллельно пружинам с жесткостями  $k_2$  и  $k_3$  определенных стопорящих механизмов. На рис. 8 а приведено семейство частотных характеристик по отношению к объекту защиты ( $90^\circ$ ) для визуализации влияния на этих параметрах изменения передаточного отношения  $i_1$  рычажного механизма.

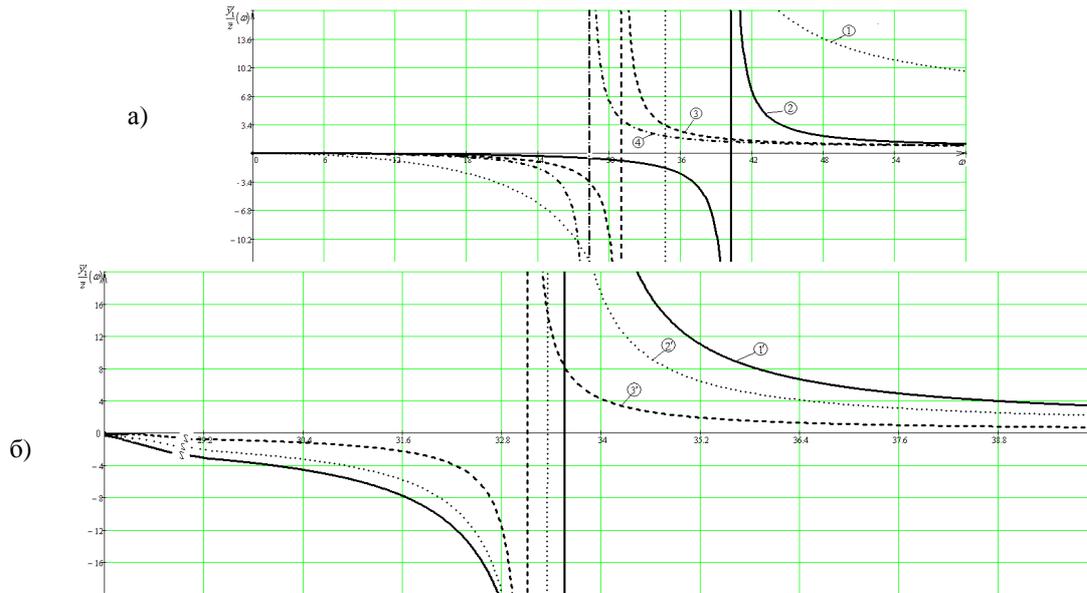


Рис. 8. Семейство графиков зависимостей частотных характеристик  $\frac{\bar{y}_1'}{z}(\omega)$  при  $k_2 \rightarrow \infty, k_3 \rightarrow \infty$ :

- а – при различных значениях массы объекта защиты (1 -  $M = 60$  кг;  
2 -  $M = 90$  кг; 3 -  $M = 120$  кг; 4 -  $M = 150$  кг);  
б – при различных значениях  $i_1$  (1' -  $i_1 = 0,1$ ; 2' -  $i_1 = 1$ ; 3' -  $i_1 = 3$ ),  $M = 100$  кг

Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют расчетным массам объекта защиты 60, 90, 120, 150 кг соответственно (рис. 8 а). Кривые 1', 2', 3' на рис. 8 б являются семейством кривых, отражающих изменения  $i_1$  в пределах 0,1 ... 3.

Таким образом, использование в структуре механических колебательных

систем, при рассмотрении задач динамики объектов машиностроения, дополнительных связей в виде механизмов для преобразования движения может существенно расширять спектр динамических свойств систем при действии возмущений кинематической природы.

## Выводы

1. Предлагается метод построения структурных математических моделей для механических колебательных систем, в составе которых имеются твердые тела, совершающие плоское движение, и устройства для преобразования движения. В подобного рода системах реализуются многочисленные динамические связи, в том числе свойственные рычажным механизмам.

2. Разработана методологическая основа получения структурных математических моделей при силовых возмущениях, приложенных непосредственно к твердому телу, рассматриваемому в качестве объекта вибрационной защиты. Для оценки динамических свойств предлагается приме-

нение передаточных функций, отражающих влияние различных динамических связей, в том числе создаваемых разнесенными дополнительными сосредоточенными массами.

Показаны возможности изменения динамических свойств при соответствующем выборе параметров взаимодействующих между собой рычажных механизмов с настраиваемыми параметрами.

3. При действии кинематических внешних возмущений со стороны опорной поверхности характер взаимодействия элементов системы существенным образом изменяется. Предложена технология преобразования систем и построения структурных математических моделей в виде

структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Разработана методика определения приведенных массоинерционных параметров и внешних сил, приводимых к соответствующим координатам системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белокобыльский, С.В. Динамика механических колебательных систем / С.В.Белокобыльский, С.В.Елисеев, И.С.Ситов. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
2. Галиев, И.И. Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей / И.И.Галиев, В.А.Нехаев, В.А.Николаев. – М.: Учеб.-метод. центр по образованию на ж.-д. транспорте, 2010. – 340 с.
3. Доронин, С.В. Экспертиза конструктивных решений и технологии проектирования инновационных изделий машиностроения / С.В.Доронин, Ю.П.Похабов, В.В.Москвичев [и др.]. – Красноярск: СКТБ «Наука» КНЦ СО РАН, 2011. – 72 с.
4. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем / В.П.Тарасик. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
5. Хоменко, А.П. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных колебательных систем / А.П.Хоменко, С.В.Елисеев, Ю.В.Ермошенко. – Иркутск, 2012. – 288 с.
6. Елисеев, С.В. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С.В.Елисеев, Ю.И.Резник, А.П.Хоменко, А.А.Засядко. – Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
7. Harris, C.M. Shock and Vibration Handbook / C.M.Harris, G.Allan. – USA, New York: Mc Graw-Hill, 2002. – 877 p.
8. Елисеев, С.В. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С.В.Елисеев, Ю.И.Резник, А.П.Хоменко. – Новосибирск: Наука, 2011. – 384 с.
9. Елисеев, С.В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В.Елисеев, А.И.Артюнин. – Новосибирск: Наука, 2016. – 459 с.

4. Получены аналитические соотношения для определения параметров характерных динамических состояний, которые могут представлять интерес для приложения в вибрационной защите машин, оборудования и приборов.

10. Хоменко, А.П. Динамика и управление в задачах виброзащиты и виброизоляции подвижных объектов / А.П.Хоменко. – Иркутск: ИГУ, 2000. – 293 с.
11. Кирюхин, А.В. Активная виброзащита – назначение, принципы, состояние. Активная виброзащита и шумоизоляция трубопроводов и экспериментальные исследования / А.В.Кирюхин, В.А.Тихонов, А.Г.Чистяков, В.В.Яблонский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №4. – С. 102-110.
12. Кирюхин, А. В. Активная виброзащита – назначение, принципы, состояние. Активная виброизоляция в автомобилях / А.В.Кирюхин, В.А.Тихонов, А.Г.Чистяков, В.В.Яблонский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №2. – С. 56-59.
13. Eliseev, S.V. Dynamics of mechanical system with additional ties / S.V.Eliseev, A.V.Lukyanov, Yu.N.Reznik, A.P.Khomenko. – Иркутск: ИГУ, 2006. – 315 с.
14. Паршута, Е.А. Оценка динамических свойств виброзащитных систем при исследовании и проектировании объектов машиностроения: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.02 / Е.А.Паршута. – Братск, 2014. – 17 с.
15. Елисеев, С.В. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования / С.В.Елисеев, А.П.Хоменко. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357 с.
16. Белокобыльский, С.В. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем / С.В.Белокобыльский, С.В.Елисеев, В.Б.Кашуба. – СПб.: Политехника, 2013. – 374 с.
17. Дружинский, И.А. Механические цепи / И.А.Дружинский. – М.: Машиностроение, 1977. – 238 с.
18. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И.Лурье. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

1. Belokobyiski S. V., Eliseev S. V., Sitov I. S. Dinamika mekhanicheskikh kolebatel'nykh system. – Irkutsk: IrGUPS. 2012. – 156 p.
2. Galiev I. I., Nekhaev V. A., Nikolaev V. A. Metody i sredstva vibrozashchity zhyileznodorozhnykh ekipazhei. – М.: GOU “The training center for education on railway transport”. 2010. – 340 p.

3. Doronin S. V. Ekspertiza konstruktivnykh reshenii i technology proektirovaniya innovatsionnykh izdelii mashinostroeniya / S. V. Doronin, Yu. P. Pokhabov, V. V. Moskvicev i dr. / Preprint № 1. Krasnoyarsk: SKTB “Nayka” KNTs SO RAN, 2011. 72 p.

4. Tarasik V. P. Matematicheskoe modelirovanie tekhnicheskikh system / V. P. Tarasik. 2-e izd. ispr. i dop. – Minsk: Dizain PRO, 2004. – 640 p.
5. Khomenko A. P., Eliseev S. V., Ermoshenko Yu. V. Systemnyi analiz i matematicheskoe modelirovanie v mekhatronike vibrozashitnykh kolebatel'nykh system. – Irkutsk: 2012. – 288 p.
6. Eliseev S. V., Reznik Yu. I., Khomenko A. P., Zasyadko A. A. Dinamicheskiy sistem v obobshchennykh zadachakh vibrozashityi i vibroizolyatsii tekhnicheskikh obektov. – Irkutsk: IGU. 2008. – 253 p.
7. Harris' C. M., Allan G. Shock and Vibration Handbook. USA/ Mc Graw-Hill, New-York. 2002. – pp. 877.
8. Eliseev S. V., Reznik Yu. I., Khomenko A. P. Mekhatronicheskiye podkhody v dinamike mekhanicheskikh kolebatel'nykh system. – Novosibirsk: Nauka, 2011. – 384 p.
9. Eliseev S. V., Artyunin A. I. Prikladnaya teoriya kolebanii v zadachakh dinamiki lineinykh mekhanicheskikh system. – Novosibirsk: Nauka, 2016. – 459 p.
10. Khomenko A. P. Dinamika i upravlenie v zadachakh vibrozashityi i vibroizolyatsii podvizhnykh obektov / A. P. Khomenko. – Irkutsk: IGU, 2000. – 293 p.
11. Kiryukhin A. V. Aktivnaya vibrozashita – naznachenie, printsipy, sostoyanie. Aktivnaya vibrozashita i shumozolyatsia truboprovodov i eksperimental'nyye issledovaniya [Test] / A. V. Kiryukhin, V. A. Tikhonov, A. G. Chictyakov, V. V. Yablonski // Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii. 2012. №4, pp 102-110.
12. Kiryukhin A. V. Aktivnaya vibrozashita – naznachenie, printsipy, sostoyanie. Aktivnaya vibrozashita v avtomobilyakh [Текст] / A. V. Kiryukhin, V. A. Tikhonov, A. G. Chictyakov, V. V. Yablonski // Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii. 2012. №2, pp 56-59.
13. Eliseev S. V., Lukyanov A. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. Dynamics of mechanical system with additional ties. – Иркутск: ИГУ, 2006. – 315 с.
14. Parshuta E. A. Otshenka dinamicheskikh svoystv vibrozashitnykh system pri issledovanii i proektirovanii obektov mashinostroeniya / avtoref. dis. kand. nauk: 05.02.02 / Parshuta E. A.. – Bratsk, 2014. – 17 p.
15. Eliseev S. V., Khomenko A. P. Dinamicheskoe gashenie kolebanii: kontseptsia obratnoi svyazi i strukturnyye metody matematicheskogo modelirovaniya. – Novosibirsk: Nauka, 2014. – 357 p.
16. Belokobyiski S. V., Eliseev S. V., Kashuba V. B. Prikladnyye zadachi strukturnoi teorii vibrozashitnykh system. – S.Petersburg: Politekhnik. 2013. – 374 p.
17. Dryzhinski I. A. Mekhanicheskie tsepi. – M.: Mashinostroeniye, 1997. – 238 p.
18. Lurie A. I. Analiticheskaya mekhanika. – M.: Nauka, 1968. – 720 p.

*Статья поступила в редколлегию 14.11.2016.*

*Рецензент: д.т.н., профессор  
Иркутского государственного  
университета путей сообщения  
Артюнин А.И.*

#### Сведения об авторах:

**Елисеев Сергей Викторович**, д.т.н., профессор Иркутского государственного университета путей сообщения, тел.: 8(3952)638-326, e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru).

**Кашуба Владимир Богданович**, к.т.н., первый проректор Братского государственного университета, тел.: 8(3953) 325-302, e-mail: [nauka@brstu.ru](mailto:nauka@brstu.ru).

**Николаев Андрей Владимирович**, мл. науч. сотрудник Иркутского государственного университе-

**Eliseev Segey Victorovich**, D. Eng., Prof. of Irkutsk State University of Communications, Phone: 8(3952)638-326, e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru).

**Kashuba Vladimir Bogdanovich**, Can. Eng., First Pro-rector of Bratsk State University, Phone: 8(3953) 325-302, e-mail: [nauka@brstu.ru](mailto:nauka@brstu.ru).

**Nikolayev Andrey Vladimirovich**, Junior research worker of Irkutsk State University of Communications,

та путей сообщения, тел.: 8(3952)638-303, e-mail: [nikolaev\\_av@irgups.ru](mailto:nikolaev_av@irgups.ru).

**Вьюнг Куанг Чык**, аспирант Иркутского государственного университета путей сообщения, тел.: 8(3952)638-399 доб. 0296, e-mail: [trucvq1990@gmail.com](mailto:trucvq1990@gmail.com).

Phone: 8(3952)638-303, e-mail: [nikolaev\\_av@irgups.ru](mailto:nikolaev_av@irgups.ru).

**Vyong Kuang Chyk**, Post graduate student of Irkutsk State university of Communications, Phone: 8(3952)638-399, extension number. 0296, e-mail: [trucvq1990@gmail.com](mailto:trucvq1990@gmail.com).