

УДК 621.771.01

DOI: 10.30987/article_5d2df087f1b850.47783687

А.В. Королев, д.т.н., **А.П. Туренко**, аспирант
(ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.», 410054, г. Саратов, Политехническая, 77)
E-mail: science7@bk.ru

Модель формирования незамкнутых колец из гибких упругих стержней

*Рассмотрена проблема формирования незамкнутых колец пластическим изгибом. Проанализировано влияние на-
строечных параметров технологической системы на диаметр формируемых колец. Предложены зависимости для рас-
чета изгибающего момента упругой и изгибающего момента пластической деформации в различных сечениях кольца.*

Ключевые слова: изгиб; упругий стержень; кольцо; радиус; изгибающий момент.

A.V. Korolyov, Dr. Sc. Tech. **A.P. Turenko**, Post graduate student
(FSBEI HE "Gagarin State Technical University of Saratov", 77, Polytechnicheskaya Str., Saratov, 410054)

Model of forming open-ended rings made of elastic rods

*The problem of forming open-ended rings by a plastic bend is considered. The influence of technological system super-
structural parameters upon a diameter of rings formed is analyzed. The dependences for the calculation of a bending moment of
elastic deformation and a bending moment of a plastic one in different sections of a ring are offered.*

Keywords: bend; elastic rod; ring; radius; bending moment.

В машиностроении широко применяются изделия в виде колец, изготовленных из пластика. В частности, авторами предложена конструкция упорно-радиального подшипника скольжения, в котором внешняя нагрузка воспринимается фторопластовым опорным кольцом, обеспечивающим низкий момент сопротивления вращению и высокую износостойкость деталей подшипника [1, 2]. Данный подшипник изготавливается ООО «ИнПрод-Маш» и поставляется в качестве верхней опоры производителям передней подвески автомобиля семейства ВАЗ: «Калина», «Приора», «Гранта» и др.

Для того, чтобы обеспечить самоустановку опорного кольца относительно дорожек скольжения колец подшипника опорное кольцо имеет разрез вдоль его оси. Незамкнутое

кольцо по сравнению с замкнутым имеет то преимущество, что оно гораздо проще в изготовлении и обеспечивает возможность его безотходного производства из стандартных пластин.

Схема изготовления незамкнутого опорного кольца представлена на рис. 1.

Между вращающимися валками 1 и 2 заземлена плоская лента 3 прямоугольного сечения или с закруглениями по бокам. Свободный конец ленты 3 упирается в рабочую грань упора 4. Рабочая грань упора 4 расположена под углом ν_p к направлению подачи заготовки Ox . При вращении валков 1 и 2 лента подается на упор 4 и изгибается, образуя радиус изгиба r . После прокатки за счет действия упругих сил лента частично выпрямляется, образуя кольцо требуемого диаметра D .

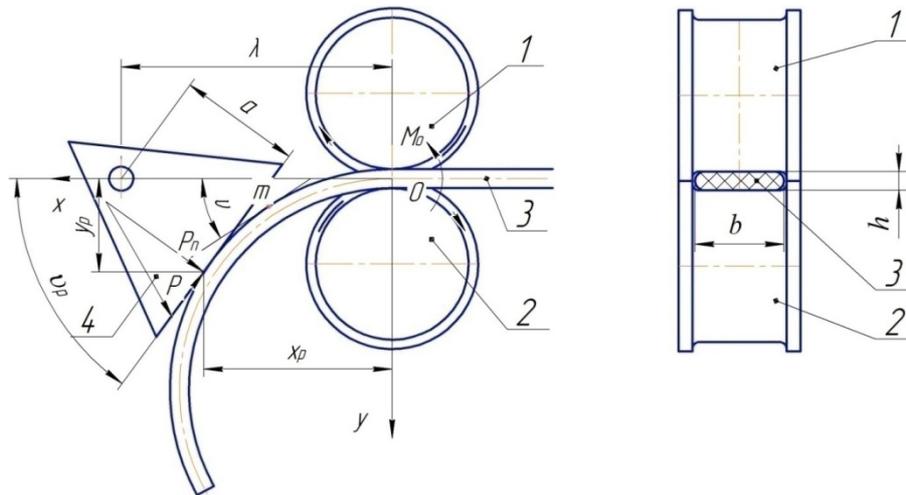


Рис. 1. Схема формирования опорного кольца подшипника

Для обоснованного выбора параметров процесса формирования незамкнутого кольца необходимо знать их влияние на его геометрические параметры. Такую задачу наиболее полно можно решить методом математического моделирования процесса.

Диаметр формируемого кольца намного превышает его толщину, поэтому исходную заготовку следует рассматривать как тонкий упругий стержень. В связи с этим, рассматриваемый процесс гибки не позволяет использовать при построении математической модели классическую теорию малых деформаций сопротивления материалов. Поэтому в основу построения математической модели положена наиболее общая теория изгиба, предложенная в работах [3 – 5].

Для определения геометрических параметров сечения кольца построим Декартову систему координат (см. рис. 1) и составим следующее дифференциальное уравнение равновесия упругой линии при больших перемещениях при плоском изгибе [3]:

$$\frac{d^2(\nu + \delta_p)}{ds^2} - \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{E \cdot J} \sin(\nu + \delta_p), \quad (1)$$

где ν – угол наклона касательной в рассматриваемой точке m упругой линии к оси Ox в рассматриваемый момент времени, рад; θ – угол наклона касательной в рассматриваемой точке упругой линии к оси Ox перед началом деформации (для начальной прямой $\theta = 0$), рад.; s – длина упругой линии, мм; P – результирующая внешняя нагрузка, Н; δ_p – угол наклона результирующей внешней нагрузки P к оси Ox , рад; E – модуль упругости материала заготовки, МПа; J – осевой момент инерции сечения пластины относительно ее центральной оси, мм⁴.

Умножим обе части равенства (1) на следующую величину:

$$2 \cdot \frac{d(\nu + \delta_p)}{ds} \cdot ds.$$

Интегрируя обе части равенства (1), при $\theta = 0$ получим формулы:

$$2 \int \frac{d^2(\nu + \delta_p)}{ds^2} \cdot \frac{d(\nu + \delta_p)}{ds} \cdot ds = \left(\frac{d(\nu + \delta_p)}{ds} \right)^2; 2 \int \frac{P}{E \cdot J} \sin(\nu + \delta_p) \cdot d(\nu + \delta_p) = \frac{2P}{E \cdot J} (\cos(\nu + \delta_p) + C), \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная, определяемая начальными условиями.

Но, так как

$$\frac{d(\nu + \delta_p)}{ds} = \frac{d\nu}{ds} = \rho, \quad (3)$$

где ρ – кривизна упругой линии в рассматриваемой точке m равна 1,0 мм⁻¹, то из формулы (2) имеем:

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{2P}{E \cdot J} (\cos(\nu + \delta_p) + C)}. \quad (4)$$

Примем за положительное направление кривизны то, что изображено на рис. 1. Так как знак кривизны в пределах рассматриваемой дуги не меняется, то в равенстве (4) двойной знак опускаем.

В точке действия внешней нагрузки, т.е. при $\nu = \nu_p$, кривизна упругой линии равна нулю, так как в этой точке равен нулю изгибающий момент. Из этих условий найдем величину C :

$$C = -\cos(\nu_p + \delta_p), \quad (5)$$

где ν_p – угол наклона касательной к оси Ox в точке приложения внешней нагрузки.

С учетом (5) равенство (4) примет вид:

$$\rho = \sqrt{\frac{2P}{E \cdot J} (\cos(\nu + \delta_p) - \cos(\nu_p + \delta_p))}. \quad (6)$$

Так как элементарный изгибающий момент в точке m равен

$$dM = -P \cdot \sin(\nu + \delta_p) \cdot ds, \quad (7)$$

то, интегрируя равенство (7), определим величину изгибающего момента в этой точке. Но, к сожалению, не известно значение

действующей нагрузки P .

Для ее определения примем во внимание, что

$$M = P((y_p - y) \cos \delta_p + (x_p - x) \sin \delta_p), \quad (8)$$

и что с учетом равенства (6)

$$ds = \frac{d\nu}{\rho} = \frac{d\nu}{\sqrt{\frac{2P}{E \cdot J} (\cos(\nu + \delta_p) - \cos(\nu_p + \delta_p))}}. \quad (9)$$

Выразив из (8) значение P и подставив полученное равенство и равенство (9) в выражение (7), после интегрирования по переменной $u = \nu + \delta_p$ получим:

$$M(\nu) = \frac{0,5E \cdot J}{(y_p - y) \cos \delta_p + (x_p - x) \sin \delta_p} \left(\int_{\delta_p}^{\nu + \delta_p} \frac{\sin u}{\sqrt{\cos u - (\cos(\nu_p + \delta_p))}} du \right)^2. \quad (10)$$

Так как валки 1 и 2 вращаются, то формирование незамкнутого кольца осуществляется в зоне действия максимального изгибающего момента – в плоскости защемления пластины 3 между валками. В этом сечении изгибающий момент равен:

$$M_o = \frac{2E \cdot J}{y_p \cos \delta_p + x_p \sin \delta_p} (\cos(\delta_p) - \cos(\delta_p + \nu_p)). \quad (11)$$

Выразим значения координат точки касания пластины с жестким упором y_p и x_p через настроечные параметры системы λ и ν_p . Из рис. 1 несложно определить:

$$x_p = \left(\lambda - \frac{a}{\sin \nu_p} \right) (1 - \cos \nu_p),$$

$$\delta_p = \frac{\pi}{2} - \vartheta_p - \arcsin f, \quad y_p = \lambda \sin \nu_p - a. \quad (12)$$

Равенство (11) получено исходя из упругой деформации пластины. На самом деле в процессе изгиба пластина подвергается пластической деформации, что существенно изменяет величину изгибающего момента.

Чтобы учесть влияние на изгиб заготовки пластической деформации необходимо определить изгибающий момент в произвольном сечении заготовки, в котором осуществляется пластическая деформация. Для этого воспользуемся методикой И.А. Биргера. Схема расчета представлена на рис. 2.

На рис. 2 показано поперечное сечение заготовки. В сечении действует фактический изгибающий момент M_f и напряжения изгиба, действующие вдоль оси Oy , вызванные этим моментом. В зоне, приближенной к наружной поверхности заготовки, возникает пластическая деформация, так как напряжения изгиба в

этой зоне равны пределу текучести σ_t материала пластины.

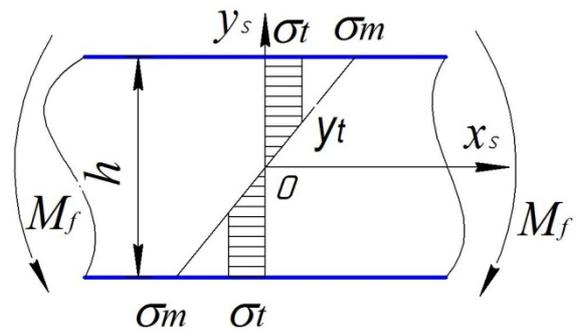


Рис. 2. Схема расчета изгибающего момента, действующего в сечении заготовки под влиянием сил упругой и пластической деформации

Обозначим координату точки перехода упругой деформации в пластическую через y_t . На участке $0 \leq y_s \leq y_t$ изгибающие напряжения являются упругими, так как они по величине меньше предела текучести $\sigma < \sigma_t$.

В соответствии с рис. 2:

– на участке упругой деформации элементарный изгибающий момент равен:

$$dM_u = \sigma_t \cdot \frac{y_s^2}{y_t} b(y_s) dy_s \quad \text{при } 0 \leq y_s \leq y_t, \quad (13)$$

где $b(y_s)$ – ширина пластины, соответствующая значению y_s .

– на участке пластической деформации элементарный изгибающий момент равен:

$$dM_p = \sigma_t \cdot y_s \cdot b(y_s) dy_s \quad \text{при } y_t < y_s < h/2. \quad (14)$$

Интегрируя равенства (13) и (14) вдоль оси Oy_s и учитывая, что $b(y_s) = b$, определим действующий в сечении изгибающий момент, вызванный упругой M_u , пластической M_p дефор-

мацией, и суммарный фактический изгибающий момент M_f :

$$M_u = 2 \frac{\sigma_t}{y_t} b \cdot \int_0^{y_t} y_s^2 dy_s = 2 \frac{\sigma_t}{3} \cdot b \cdot y_t^2, \quad (15)$$

$$M_p = \sigma_t \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_t^2 \right); \quad (16)$$

$$M_f = \sigma_t \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} y_t^2 \right). \quad (17)$$

Если бы в сечении отсутствовала пластическая деформация, то в сечении действовал бы изгибающий момент M , а максимальные напряжения изгиба были бы равны:

$$\sigma_m = \frac{M}{W} = \frac{6M}{b \cdot h^2},$$

где W – момент сопротивления изгибу.

Тогда из рис. 2 несложно определить

$$y_t = \frac{\sigma_t}{2\sigma_m} h = \frac{\sigma_t}{12M} b \cdot h^3. \quad (18)$$

Таким образом, подставив выражение (11) в равенство (18), можно найти значение y_t , и используя это значение из равенства (17) можно определить фактическое значение изгибающего момента M_{fo} с учетом действующей в сечении пластической деформации.

Тогда радиус кривизны пластины будет равен:

$$\rho_o = \frac{M_{fo}}{E \cdot J}. \quad (19)$$

Эту кривизну будут иметь все сечения пластины, перемещающиеся в процессе навивки через точку защемления.

После снятия нагрузки кривизна пластины изменится, так как за счет остаточных упругих напряжений произойдет ее упругая деформация. Кривизна пластины после снятия нагрузки будет равна

$$\rho_p = \rho_o + \frac{M_u}{E \cdot J}, \quad (20)$$

а диаметр сформированного опорного кольца в зависимости от наладочных параметров ν_p и λ равен

$$D = \frac{2}{\rho_p}. \quad (21)$$

Таким образом, получена зависимость диаметра незамкнутого кольца от влияющих факторов при формировании его из гибкого упругого стержня.

Выводы

Получена математическая модель формирования незамкнутых колец из гибких упру-

гих стержней. Как видно из представленных выше равенств, деформация заготовки и диаметр сформированного опорного кольца сложно зависят от влияющих факторов. Прежде всего, она определяется упругими E и пластическими σ_t свойствами материала, а также зависит от настроечных параметров – угла наклона упора ν_p , расстояния λ оси его поворота от точки защемления пластины между валками и размера пластины a , от коэффициента трения скольжения f пластины по поверхности упора и других факторов. Зависимости носят сложный неявный характер, но численное значение диаметра формируемого кольца несложно определить с помощью компьютерного моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **RU 171867.** Подшипник / Королев А.В., Королев А.А.. Оpubл. 19.06.2017 Бюл. № 17.
2. **RU 183831.** Опорный подшипник / Королев А.В., Королев А.А.. Оpubл. 04.10.2018 Бюл. № 18.
3. **Попов, Е.П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
4. **Мирошник, Р.А.** Расчет гибких стержней, обладающих изгибной жесткостью // Ученые записки ЙАГИ. – Т. XXI. – №5. – 1990. – С. 134-138.
5. **Расчет на прочность деталей машин: справочник/** И.А. Биргер, Б.Ф. Шор, Г.Б. Иосилевич; 4 изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
6. **O.V. Zakharov, I.N. Bobrovskij, and A.V. Kochetkov.** Analysis of Methods for Estimation of Machine Workpiece Roundness // *Procedia Engineering*. – 2016. – Vol. 150. – pp. 963-968.

REFERENCES

1. **RU 171867.** *Bearing* / Korolyov A.V., Korolyov A.A. Published: 19.06.2017. Bull. No. 17.
2. **RU 183831.** *Support Bearing* / Korolyov A.V., Korolyov A.A., Published: 04.10.2018. Bull. No.18.
3. **Popov, E.P.** *Theory and Calculation of Flexible Rods*. – M.: Science, 1986. – pp. 296.
4. **Miroshnik, R.A.** *Calculation of Flexible Rods Having Bending Stiffness* // *YAGI Proceedings*. – Vol. XXI. – No.5. – 1990. – pp. 134-138.
5. **Machinery Strength Calculation: reference book** / I.A. Birger, B.F. Shor, G.B. Iosikevich; 4-th Edition revised and expanded. – M.: Mechanical Engineering, - pp. 640.
6. **O.V. Zakharov, I.N. Bobrovskij, and A.V. Kochetkov.** Analysis of Methods for Estimation of Machine Workpiece Roundness // *Procedia Engineering*. – 2016. – Vol. 150. – pp. 963-968.

Рецензент д.т.н. А.Н. Васин