

УДК 539.3

А.Ю. Танченко, А.В. Литвиненко, А.Д. Чепурной, Ю.В. Костенко, Н.А. Ткачук

МЕТОД ПРЯМОГО КОНЕЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ, ЖЕСТКОСТНЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Предложены методы прямого возмущения конечноэлементных моделей тонкостенных машиностроительных конструкций для анализа чувствительности их прочностных, жесткостных и динамических характеристик к изменению их толщины. Показана применимость линеаризованных моделей к определению перемещений, напряжений и собственных частот колебаний слабо утоненной конструкции по сравнению с номинальной (исходной). Приведены примеры решения тестовых задач.

Ключевые слова: чувствительность, теория возмущений, напряженно-деформированное состояние, спектр собственных частот колебаний, метод конечных элементов.

Исследование динамических, прочностных и жесткостных характеристик элементов машиностроительных конструкций [1-18] в настоящее время осуществляется, как правило, при помощи численных методов. В частности, особое и преимущественное положение среди них занимает метод конечных элементов (МКЭ) [1; 2]. Он обладает многими положительными качествами, в том числе возможностью моделировать напряженно-деформированное состояние (НДС), собственные частоты и формы колебаний (СЧФК) сложных машиностроительных конструкций. При этом не встречается принципиальных затруднений учет сложной геометрической формы, неоднородности свойств материалов или их анизотропии, а также других факторов. В классическом случае для любой из поставленных задач по разработанным технологиям [1; 2] осуществляется дискретизация математической модели или состояния объекта исследования, формирование системы разрешающих уравнений и ее решение. В результате определяются, например, искомые поля распределений компонент НДС, наборы СЧФК и т. п.

Однако в традиционном случае получается только единичный вариант расчета той или иной конструкции с изначально заданными параметрами (геометрическая форма и размеры, физико-механические свойства материалов, нагрузки и т. д.). В развитие этих возможностей многие программные продукты (ANSYS Workbench, NX Nastran, Abaqus и т.п.) оснащаются инструментами параметрического анализа и синтеза исследуемых конструкций по критериям их прочности, жесткости или динамических свойств. Эти инструменты реализуют процедуры типа «черного ящика» или «белого ящика». Речь идет о вычислении по итогам некоторого количества расчетов НДС и СЧФК зависимостей динамических, прочностных или жесткостных характеристик от изменяемых параметров исследуемого объекта либо об определении его локальной чувствительности к варьированию этих параметров. Это дает возможность проводить процедуры синтеза или хотя бы оценивать эффективность влияния различных изменений параметров на интересующие свойства проектируемой машиностроительной конструкции.

Необходимо отметить, что приемы с применением «черного ящика» и «белого ящика» имеют определенные недостатки. В первом случае это необходимость проведения множества расчетов НДС или СЧФК, по результатам которых определяются значения либо критериальных функций, либо их производных по тем или иным параметрам. Во втором случае находится массив характеристик чувствительности [3-8], т. е. градиент функции отклика, однако определенный только в одной точке параметрического пространства, что зачастую не отражает тенденций изменения критериальных функций во всем диапазоне параметров, от которых они зависят.

В связи с этим представляется целесообразным использование технологии «серого ящика», т. е. привлечение в ходе исследований дополнительной информации о характере поведения той или иной критериальной функции. В частности, представляет интерес определение зависимости динамических, прочностных и жесткостных характеристик тонкостенных элементов машиностроительных конструкций от распределений их толщин по элементам конструкции, причем с учетом варьирования этих распределений. С этой целью целесообразно соединить возможности конечноэлементного анализа, с одной стороны, и достаточно простого алгоритма аналитического вычисления результатов расчета НДС и СЧФК при произвольном варьировании толщин (с использованием ограниченного числа базовых расчетов) – с другой. Данный подход и является целью и содержанием настоящей статьи.

Постановка задачи. Исследуется задача конечноэлементного анализа напряженно-деформированного состояния, собственных частот и форм колебаний пластинчато-стержневых пространственных конструкций, моделируемых Shell-элементами (www.ansys.com). При этом распределение толщин по Shell-скелету конечно-элементного ансамбля является изменяемым. Эта изменяемость может быть виртуальной (например, вследствие изменения распределения толщин различных элементов конструкции на этапе проектных разработок исходя из тех или иных соображений), согласованной (например, на этапе технологической подготовки производства изделия вследствие компромиссных согласований между проектантами и технологами), вынужденной (на этапе производства вследствие разброса толщин поставляемого на предприятие-изготовитель материала), случайной (в ходе эксплуатации в условиях воздействия множества факторов стохастического характера, таких как коррозионное деградирование, механический износ, наплавка и наварка материала при ремонте и т. п.). В любом случае все эти процессы с точки зрения влияния на конечноэлементную модель исследуемого объекта можно характеризовать следующим образом: на начальном этапе имеется некоторый ее базовый (начальный) вариант с установлением номинального распределения толщин; на последующих этапах осуществляется незначительное изменение номинальных толщин в сторону их уменьшения или увеличения (либо целенаправленное варьирование, либо детерминированное или случайное уменьшение/увеличение).

С учетом отмеченных обстоятельств задачи определения напряженно-деформированного состояния и собственных частот и форм колебаний при помощи МКЭ можно сформулировать в общем виде следующим образом:

$$K(h)x = f(h); \quad (1)$$

$$\text{Det}(K(h) - \omega^2 M(h)) = 0, \quad (2)$$

где $K(h)$, $M(h)$ – матрицы жесткости и масс конечноэлементного ансамбля, зависящие от распределения толщин, задаваемого массивом h толщин h_k ($k = 1, \dots, N_e$ – номера конечных элементов); $f(h)$ – вектор внешних нагрузок, которые также могут быть зависимыми от толщин конечных элементов h_k (например, весовые или инерционные нагрузки); x , ω^2 – искомые массивы узловых параметров и собственные частоты колебаний.

Рассмотрим, не снижая общности, процесс изменения толщин h_k на примере коррозионного утонения вследствие износа поверхностных слоев элементов конструкции.

$$h_k = h_k^0 (1 - \alpha_k), \quad k = 1, \dots, N_e,$$

где h_k^0 – массив номинальных толщин; $\alpha_k \in [0;1)$ – безразмерный коэффициент (интенсивность утонения).

Распределение α_k задает карту утонения, т.е. распределение интенсивностей утонения по Shell-скелету конечноэлементного ансамбля. Тогда, учитывая, что $\alpha_k \ll 1$, можно поставить задачу следующим образом: установить, как при варьировании распределений

интенсивности утонения $\alpha = \{\alpha_k\}^T$ изменяются решения задач (1), (2) в окрестности $\alpha=0$, т. е. определить зависимости

$$x = x(\alpha); \quad \omega_i^2 = \omega_i^2(\alpha),$$

где $i=1,2,\dots$ – номера собственных частот колебаний.

Другими словами, предлагается установить параметрическую зависимость изменений решений задач (1), (2) при малом изменении интенсивности утонения по сравнению с номинальным вариантом конструкции (исходным, неутоненным).

Рассмотрим постановку задачи анализа чувствительности прочностных, жесткостных и динамических характеристик тонкостенных элементов посредством исследования решений на дискретизированных (с помощью МКЭ) соответствующих моделях путем их прямого малого конечного возмущения. Таким образом, минуя этапы перехода от континуальной к дискретной форме, можно сразу же обратиться к анализу систем уравнений МКЭ (1), (2). В соответствии с предложенным подходом сформулируем возмущения данных величин в терминах $\alpha, x, K, M, f, \omega^2$. Для этого рассмотрим механизм формирования и определения данных величин.

Массив неизвестных x из задачи (1) формально определяется при помощи обратной матрицы K^{-1} :

$$x = K^{-1} f.$$

В данном случае массив нагрузок f формируется из заданных внешних сил путем распределения их по соответствующим степеням свободы. Спектр собственных частот ω_i определяется как набор положительных корней (2).

Естественно, что базовыми возмущаемыми величинами являются матрицы K, M . Рассмотрим их изменения и влияние на решения (1), (2) на примере утонения элементов исследуемого объекта. При этом отвлечемся от механизма процесса утонения, сосредоточив внимание на текущем состоянии. Пренебрегаем также динамикой процесса утонения.

Введем в рассмотрение операцию сборки O , которая по координатам узлов (т. е. матрице координат U) и матрице элементов C (т. е. списку узлов, входящих в образуемые ими конечные элементы) формирует матрицы K и M :

$$K = O(k^e), \quad e = 1, \dots, N_e; \quad M = O(m^e), \quad e = 1, \dots, N_e,$$

где k^e, m^e – матрицы жесткости и масс отдельных конечных элементов, число которых в ансамбле – N_e [2; 9].

Операция O как бы наслаивает в соответствующих ячейках матриц K и M влияние от всех конечных элементов. Проанализируем влияние изменений свойств отдельных элементов на компоненты k^e, m^e а затем, проведя операцию сборки, оценим общий эффект на матрицах K, M .

Рассмотрим подход к решению задачи на примере пластинчатых конструкций [18]. В частности, элементы матриц жесткости и масс будут состоять из двух компонент:

$$k_{ij} = k_{ij}^{(0)} - \alpha^e k_{ij}^{(e)}; \quad m_{ii}^{(e)} = m_{ii}^{(0)} - \alpha^e m_{ii}^{(e)}, \quad (3)$$

Следовательно, текущее состояние определяется в зависимости от коэффициента $\alpha^e = \alpha^e(t)$. При этом данный коэффициент может меняться от узла к узлу, может быть разным для масс и жесткостей в одном узле. Важной особенностью является то, что при $\alpha \ll 1$ компоненты матриц K и M состоят из 2 слагаемых: первое соответствует компонентам номинальных матриц K, M (т. е. $K(0), M(0)$), а второе образуется путем операции сборки из матриц, все компоненты которых являются линейными комбинациями номинальных матриц с малыми коэффициентами α . Тогда

$$K(\alpha) = K_0 - K'_0; \quad (4)$$

$$M(\alpha) = M_0 - M'_0. \quad (5)$$

Здесь в K_0, M_0 сосредоточены компоненты, не зависящие от α , а в K'_0, M'_0 – зависящие от них линейно.

Так, при рассмотрении пластинчатых Shell-элементов традиционно их НДС представляется в виде комбинации плоского напряженно-деформированного состояния и изгиба (на рис. 1 соответствуют плоскости xu и направлению z). Первое предполагает, что компоненты M и K прямо пропорциональны толщине конечного элемента h .

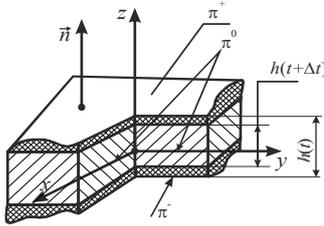


Рис. 1. Утонение пластинчатого конечного элемента: π^0 - срединная плоскость; π^+, π^- - верхняя и нижняя лицевые поверхности; h - текущая толщина в моменты времени $t, t + \Delta t$

Если при утонении взять коэффициент α как степень изменения h по сравнению с номинальным (исходным) значением h_0 , т. е. $h = h_0(1 - \alpha)$, то автоматически для плоского напряженного состояния выполняются все соотношения (3-5). Для изгибной компоненты НДС коэффициенты матрицы масс также пропорциональны h , в части их представления справедливы соотношения (3-5). Коэффициенты же матрицы жесткости пропорциональны h^3 , и при малых α справедливо примерное равенство:

$$k_{**}^e \approx k_{**}^{e0} (1 - 3\alpha^e).$$

Таким образом, сохраняется справедливость выражения (4).

В исследуемой конструкции кроме Shell-элементов могут присутствовать также стержневые конечные элементы. При формировании матриц жесткости и масс стержневых (Beam) конечных элементов обычно выделяются слагаемые от растяжения-сжатия, изгиба и кручения. Как показано в работе [18], при использовании МКЭ для моделирования напряженно-деформированного состояния и определения собственных частот и форм колебаний компоненты матриц M и K выразятся через компоненты M_0, K_0 :

$$k_{**}^e = k_{**}^{e0} (1 - n\alpha^e); \quad m_{**}^e = m_{**}^{e0} (1 - n\alpha^e).$$

Величина n конечна и зависит от того, какой степени свободы соответствует та или иная компонента K, M , а также от способа утонения материала в сечении того или иного конечного элемента. Важно то, что и для стержневых (Beam) элементов при малых α справедливы соотношения (3-5). При этом параметр α может определять для Beam-элементов степень изменения площади от номинальной F^0 .

Таким образом, можно сделать тот же вывод, что и для пластинчатых конечных элементов: соотношения (3) здесь справедливы относительно тенденций изменения компонент матриц жесткости и масс, а (4), (5) – относительно вида представления $M(\alpha), K(\alpha)$.

Общие тенденции изменения решений задач анализа напряженно-деформированного состояния. Рассматривая (4), (5) как исходные соотношения, можно исследовать поведение решений задач (1), (2). Так, для задач анализа напряженно-деформированного состояния при малых α решение можно представить в виде

$$x(\alpha) \approx x(0) + (K_0)^{-1} K'_0 f, \tag{6}$$

где $x(0)$ – решение (1) при $\alpha = 0$, а компоненты матрицы K'_0 есть линейные комбинации слагаемых типа (3). Компоненты вектора решения $x(\alpha)$ представляют собой сумму решений для базовой неутоненной конструкции и линейной по степеням утонения отдельных конечных элементов (образуют массив характеристик α). Таким образом, для определения решения при любой конфигурации утонения исследуемой конструкции необходимо знать лишь решение $x_0 = x(0)$ для базового неутоненного варианта и располагать матрицами K'_0, K_0^{-1} . Тогда компоненты решения $x^{(s)}$ могут быть представлены в виде линейной комбинации:

$$x^{(s)}(\alpha) = x_0^{(s)} + \sum_k \rho_{ks} \alpha_k x_0^{(s)}, \quad (7)$$

где ρ_{ks} , α_k – элементы матриц K_0^{-1} , K_0' [см. (6)].

Отсюда следует, что для организации многовариантных исследований НДС тонкостенных конструкций с учетом утонения стенок (т.е. при разных наборах α) можно использовать решение (7).

Замечание 1. Поскольку данные соотношения выведены из приближенных равенств, то их применение ограничено малыми α . С другой стороны, точность соотношений (7) хоть и может ухудшиться с ростом α_k , однако тенденцию изменения компонент решения $x(\alpha)$ они будут отражать удовлетворительно. Поэтому, задавшись предельно допустимыми (нормативными) значениями α^* , можно по значениям точных решений при задании различных сочетаний $\alpha \sim \{0, \dots, \alpha^*, \dots, 0\}$ получить соотношения для определения ρ_{kp}^{\wedge} (или чувствительности

$\Delta^{(p)} = \{\Delta_1^{(p)}, \Delta_2^{(p)}, \dots, \Delta_{N_e}^{(p)}\}^T : \sum_{k=1}^N \rho_{kp}^{\wedge} \alpha_k \tilde{x}_0^{(p)} = x_*^{(p)} - x_0^{(p)} = \alpha^* \Delta^{(p)}$, где $x_* = \{x_*^{(p)}\}$ – точные решения системы уравнений (1) при $K = K(\alpha \sim)$ (так называемые реперные решения).

С учетом этого решение $x(\alpha)$ для произвольного распределения утонений α_k определяется как линейная комбинация номинального и реперных решений:

$$x_{(\alpha)}^{(i)} = x_0^{(i)} + \sum_k \Delta_i^k \alpha_k. \quad (8)$$

Таким образом, получаем примерное решение в виде, аналогичном (7), но соответствующее большому диапазону изменения коэффициентов α_k . В результате полученные соотношения для определения решения могут быть использованы для многовариантных расчетов НДС при различных сочетаниях утонений стенок без необходимости решения полной системы уравнений МКЭ (1) для каждого сочетания α . Это дает возможность оперативного решения различных задач параметрического анализа и синтеза. Действительно, получаемая функция отклика становится кусочно-линейной, ограничения – линейными, и процедура обоснования рациональных параметров сводится к разработанным алгоритмам линейного программирования [10].

Замечание 2. У предложенного подхода, несмотря на увеличение числа необходимых расчетов (кроме базового расчета при нулевом утонении требуется еще проведение стольких расчетов, сколько наличествует элементов с различными степенями утонения), есть преимущество по сравнению с традиционным анализом чувствительности по соотношениям (7). Оно заключается в том, что с ростом α приближенные формулы (7) теряют точность. В то же время предложенный подход предполагает оперирование на всех этапах с матрицами жесткости и масс, получаемыми напрямую по известным соотношениям МКЭ, справедливым при любом значении α . При этом все свойства матриц $K(\alpha)$, $M(\alpha)$, вычисленных без линеаризации, путем прямого малого конечного возмущения конечно-элементной модели, идентичны свойствам $K(0)$, $M(0)$. Таким образом, при приближении к предельно допустимым значениям α^* (например, для подъемных машин – 20 % толщины) точность решения по формуле (8) может быть даже выше, чем для меньших значений α .

Замечание 3. Тенденции линейного поведения компонент вектора решения $x(\alpha)$ вызывают естественное его распространение и для компонент тензора напряжений, по этим перемещениям вычисляемых. В то же время это не всегда относится к знаку линейной части выражений: при росте перемещений могут наблюдаться как увеличение, так и уменьшение напряжений (см. пример 2 далее).

Изменение собственных частот колебаний конструкции. Обращаясь к задаче анализа спектра частот собственных колебаний (2), рассмотрим сначала задачу поиска квадрата первой (низшей) собственной частоты как абсолютного минимума функции Рэлея R :

$$\omega_1^2 = \min R = \min \left\{ \sum K_{ij} y_i y_j / \sum M_{ij} y_i y_j \right\},$$

где K_{ij}, M_{ij} – компоненты матриц K и M ; y_k – компоненты пробных распределений, приближающих первую собственную форму колебаний A с компонентами A_k .

Находя достаточно хорошее приближение $\omega_1^2(\alpha)$, можно использовать то обстоятельство, что сама собственная частота, определяемая по функции Рэлея, при изменении формы A отклоняется от точного значения незначительно [15]. Поэтому при малых α можно не делать различий между формами $A(0)$ и $A(\alpha)$. Тогда

$$\omega^2(\alpha) = \omega_0^2 \left(\frac{1 - \sum_{i,j} K'_{ij} A_i A_j / \sum_{i,j} K^0_{ij} A_i A_j}{1 - \sum_{i,j} M'_{ij} A_i A_j / \sum_{i,j} M^0_{ij} A_i A_j} \right), \quad (9)$$

где $\omega_0^2 = \sum_{i,j} K^0_{ij} A_i A_j / \sum_{i,j} M^0_{ij} A_i A_j$.

Можно сделать вывод, что по сравнению с неутоненной конструкцией низшая собственная форма колебаний либо растет, либо уменьшается, либо остается неизменной – в зависимости от скоростей роста числителя и знаменателя (9). Переписав для малых α последнее выражение в виде

$$\omega^2(\alpha) \approx \omega_0^2 (1 - \delta_K)(1 + \delta_M), \quad (10)$$

где δ_K, δ_M – отношения значений билинейных форм, вычисляемых для возмущений, вызванных утонением, и для базового неутоненного варианта (соответственно для матриц K и M), можно принять

$$\omega^2(\alpha) \approx \omega_0^2 (1 - \delta_K + \delta_M); \quad \omega(\alpha) \approx \omega_0 (1 - (\delta_K - \delta_M) / 2). \quad (11)$$

Так как δ_K, δ_M линейно зависят от параметров α , то и ω^2 , и ω имеют приближенно линейную зависимость от степени утонения элементов машиностроительных конструкций.

Замечание 4. Учитывая, что для определения более высоких частот колебаний с использованием функции Рэлея ищется ее условный экстремум на формах, ортогональных предшествующим, вместо задачи минимизации получаем последовательность минимаксных задач. При этом вид самой функции Рэлея сохранится, и все выкладки сохранятся теми же. При малых α останутся справедливыми те же оценочные соотношения (10), (11), однако входящие в них величины δ_K, δ_M изменятся, в связи с чем может измениться и тенденция миграции той или иной частоты.

Тестовые задачи. Ниже описан ряд тестовых задач, в которых специальным образом задается утонение поперечных сечений. Оно моделируется удалением («вымыванием») деградировавшего (например, вследствие поверхностного коррозионного повреждения) материала, который теряет свои механические свойства.

Частный случай №1. Изменение спектра собственных колебаний шарнирно опертого стержня первоначально прямоугольного сечения. На рис. 2 представлен специально заданный частный вид утонения стержня прямоугольного сечения (деградировавшая и удаляемая часть материала заштрихована). Используя принятую форму записи с привлечением обозначений C_s (константы, в которых аккумулируются величины, неизменные при утонении), для спектра частот собственных колебаний стержня в плоскости zx имеем [15] $\omega_i = C_4 \sqrt{I_y(\alpha) / F(\alpha)}$, где I_y, F – момент инерции и площадь сечения стержня; $\alpha = t/h$ – степень утонения. Кроме того, обозначим $\chi = h/b$; $t/b = \gamma$; $\gamma = \chi\alpha$.

Вводя в рассмотрение относительное изменение частоты $\lambda_i = \omega_i(\alpha) / \omega_i(0)$, с учетом принятых обозначений получаем

$$\lambda_i = \lambda = \sqrt{\left(1 - 2\chi\alpha^2 \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}(3 - 2\alpha)^2 \right\}\right) / (1 - 2\chi\alpha^2)}.$$

Через коэффициент изменения площади поперечного сечения $2\alpha\gamma = 2\chi\alpha^2 = \delta = \Delta S(\alpha) / S$

$$\lambda = \sqrt{\left[1 - (1/3)\delta \left(\delta/\chi + \left(3 - \sqrt{2\delta/\chi}\right)^2 \right)\right] / (1-\delta)};$$

$$\lambda \approx (1 + \delta/2)(1 - 3\delta/2) \approx 1 - \delta, \quad \forall \delta \ll 1. \quad (12)$$

На рис. 3 представлена зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/2]$, а также – штриховой линией – линейризованная зависимость (12), которая соответствует анализу чувствительности на основе теории возмущений. Видно, что линейризованная зависимость дает значительную погрешность при $\alpha, \delta \rightarrow 1/2$ (до 40%), в то время как аппроксимация по секущей точке на кривой, соответствующей $\delta = 1/4$, дает возможность сократить погрешность до 2%, причем она минимальна при $\alpha, \delta \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 1/4$ (т.е. для номинального и максимально утоненного поперечного сечения, при $\lambda^* = 0,25$).

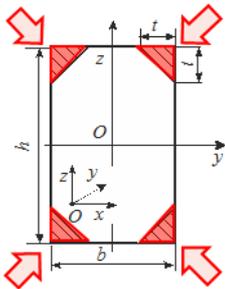


Рис. 2. Частный вид утонения стержня прямоугольного сечения

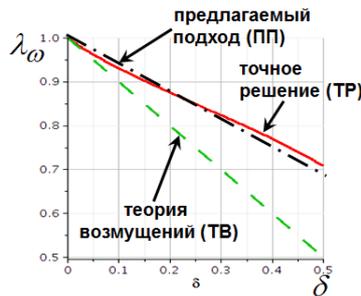


Рис. 3. Зависимость $\lambda(\delta)$ в интервале $\delta \in [0; 1/2]$

Приведенный пример демонстрирует возможность более точного определения изменения (миграции) собственных частот колебаний исследуемого объекта при использовании предлагаемого в статье подхода по сравнению с традиционными методиками (например, по определению чувствительности на основе теории возмущений [3-8]).

Замечание 5. Так как все частоты поперечных колебаний стержня в одной выбранной плоскости одинаково зависят от геометрических параметров сечения [15], то при одном и том же утонении α

(или δ) тенденции миграции частот колебаний одинаковы.

Частный случай № 2. Изгиб шарнирно опертого стержня ромбовидного поперечного сечения. Здесь процесс утонения описывается либо отношением линейных размеров α , либо отношением площадей: $\alpha = t/a, \delta = 2t^2/a^2$. По аналогии с приведенными выше соотношениями получаем для данного случая

$$\lambda_w = 3 / \left[3 - \delta^2 - 2\delta(3 - 2\sqrt{\delta})^2 \right]; \quad \lambda_\sigma = 3(1 - \sqrt{\delta}) / \left[3 - \delta^2 - 2\delta(3 - 2\sqrt{\delta})^2 \right].$$

С точки зрения наличия особенностей распределение λ_w не привносит ничего отличного от аналогичных зависимостей (см. выше), а вот λ_σ демонстрирует специфическое поведение при малых δ ($< 0,05$) (рис. 4). Эта особенность заключается, во-первых, в наличии ниспадающего участка $\lambda_\sigma(\delta)$ на интервале примерно до $\delta \approx 0,012$, а во-вторых, линейризуемая зависимость по $\alpha \lambda_\sigma \approx 1 - \sqrt{\delta}$, представленная в виде $\lambda_\sigma(\delta)$, имеет корневую особенность производной при $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, линейризация по этому параметру в окрестности нуля некорректна.

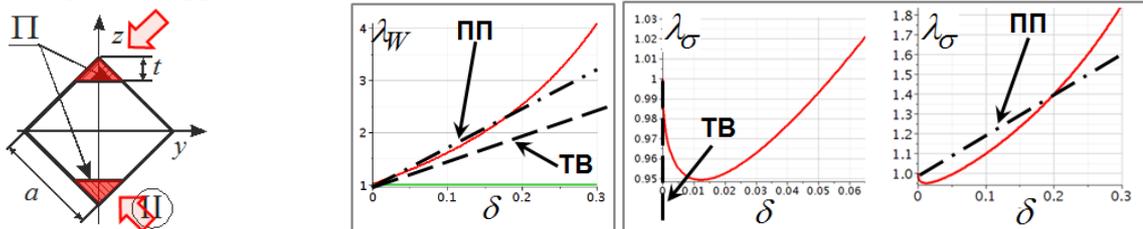


Рис. 4. Зависимости λ_w и λ_σ от δ для случая специального утонения ромбовидного поперечного сечения

Тут же нужно заметить, что сама величина снижения λ_σ по сравнению с 1 мала, как мал и участок падения. Поэтому предлагаемая в работе линейризация по конечному при-

ращению δ (например, $\delta=0,2$) хоть и не отражает особенности изменения λ_σ при $\delta \rightarrow 0$, тем не менее обеспечивает отличие от точной кривой $\lambda_0(\delta)$ на уровне 10% на интервале $\delta \in [0; 0,25]$.

Из данного примера можно сделать вывод о том, что предложенный в статье подход дает возможность более точно описать тенденцию изменения решения задачи об определении НДС на некотором задаваемом интервале варьирования α . В этом случае получаем как бы осредненную зависимость решения от α в противовес локальной, точечной чувствительности, определяемой, например, по теории возмущений [3-8].

Анализ полученных зависимостей свидетельствует также, что в некоторых случаях применение зависимостей, полученных на основе теории возмущений, приводит не только к количественным, но и к качественным несоответствиям получаемых результатов.

Частный случай №3. Собственные частоты стержня полого сечения при одновременном утонении изнутри и снаружи. Исследуем миграцию собственных частот поперечных колебаний стержня с поперечным сечением, изображенным на рис. 5. Утонение задается смещением линий I и II:

$$h_1 = h_1^0(1 + \psi); h_2 = h_2^0(1 - \phi); h_1^0 / h_2^0 = K \in [0, 1].$$

Тогда изменение собственных частот описывается выражением

$$\lambda_\omega = \sqrt{(1 - K) \left[(1 - \phi)^3 - K^3 (1 + \psi)^3 \right] / \left[(1 - K^3) (1 - \phi - K(1 + \psi)) \right]}.$$

На рис. 5 показаны тенденции изменения параметра $\lambda_\omega = \lambda_\omega(\phi, \psi)$.

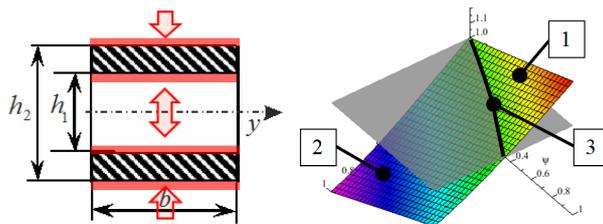


Рис. 5. Полюй стержень с пренебрежимо тонкими вертикальными полками, удаляемыми поверхностными слоями изнутри и снаружи и зависимость λ_ω от степеней утонения ϕ, ψ

Как видно из рис. 5, в плоскости ϕ, ψ существуют области роста параметра λ_ω (соответствуют номеру 1 на рис. 5), области убывания (номер 2 на рис. 5), а также линия стабильности 3 на границе областей 1 и 2. Вдоль этой линии $\lambda_\omega = 1$, т.е. при задании такого специального сценария утонения (вдоль линии 3) собственные частоты остаются неизменными. Следует заметить при этом, что приведенная на рис. 5 зависимость реализуется в области, ограниченной координатными осями и линией $K(1 + \psi) = 1 - \phi$.

Анализ представленных результатов свидетельствует о возможности реализации разнонаправленных изменений спектра собственных частот колебаний (в том числе и стабилизации этого спектра) путем выбора соответствующего сценария утонения.

Частный случай №4. Изменение спектра собственных частот колебаний корпусов транспортных средств специального назначения. Многие транспортные машины специального назначения могут быть использованы не только в военных целях, но и для выполнения ряда других миссий. При изменении назначения той или иной модификации машины изменяются также спектр и амплитуды действующих эксплуатационных нагрузок. Поэтому важно знать характер миграции собственных частот колебаний корпуса, как основного интегрирующего элемента транспортного средства специального назначения, и степень их отклонения от исходных величин, определенных для некоторого номинального варианта, принятого за основу. В данном случае представляет наибольший интерес применимость линейной интерполяции для описания миграции собственных частот при утонении-утолщении стенок панелей корпуса и элементов внутренней силовой структуры. Проиллюстрируем результаты анализа на примере корпуса тягача серии МТ-ЛБ. На рис. 6 представлена его оболочечная модель с внутренней силовой структурой и местами закрепления. Рассмотрим случай варьирования значений толщин в довольно широких преде-

лах: 6 ± 2 мм (одновременно изменяются значения толщин как внешних листов, так и профилей внутреннего усиления), т.е. $\pm 33\%$ относительно базового варианта (6 мм). Поскольку речь идет о демонстрационной задаче, то распределения толщин панелей в проекциях и профилей элементов внутренней силовой структуры не соответствуют реальным конструктивным параметрам.

В ходе численных экспериментов при варьировании толщины элементов корпуса был получен ряд собственных частот и соответствующих им форм собственных колебаний (рис. 6). Были получены следующие результаты: при варьировании толщин стенок элементов корпуса в диапазоне 6 ± 2 мм отклонение значений соответствующих собственных частот составило порядка 20-30% в сторону снижения при уменьшении толщины стенок, в сторону увеличения – при утолщении (рис. 6). Обращает на себя внимание примерная линейность характера изменения собственных частот.

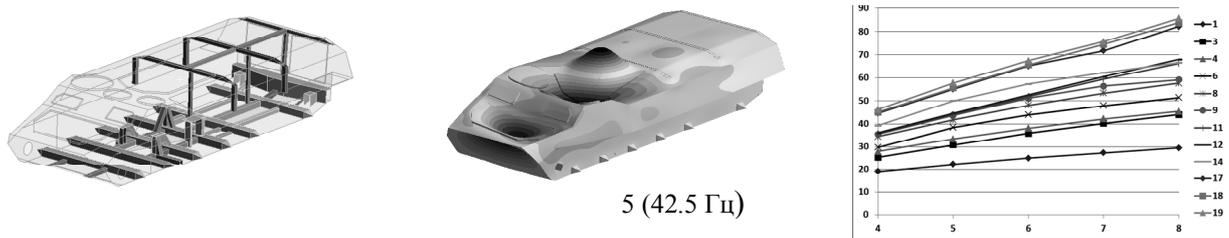


Рис. 6. Модель корпуса МТ-ЛБ: внутренняя силовая структура и некоторые собственные формы колебаний корпуса МТ-ЛБ (при толщине элементов корпуса 6 мм), а также миграция отдельных собственных частот (Гц) корпуса МТ-ЛБ при изменении толщины листов

Таким образом, ранее предложенная методика линеаризации промежуточного описания поведения решения (на примере собственных частот колебаний) на основе набора реперных решений демонстрирует свою применимость и для таких объектов, как корпуса транспортных средств специального назначения.

Частный случай № 5. Выбивная машина «грохот». В качестве исследуемой конструкции выступает высоконагруженная крупнотоннажная вибрационная машина с дебалансным приводом для выбивки крупного вагонного литья [17]. Общая схема выбивной машины и геометрическая оболочечная модель с результатами представлены на рис. 7.

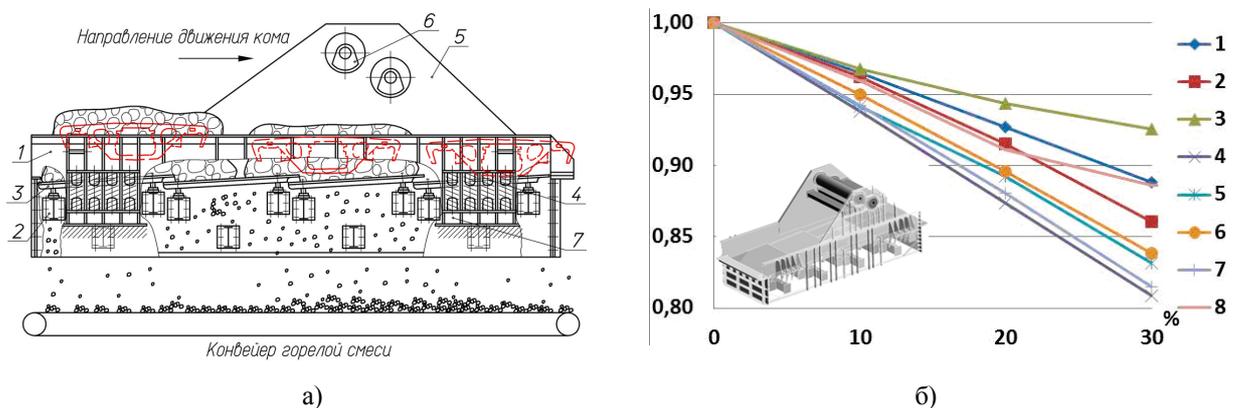


Рис. 7. Выбивная машина: а - общая схема (1 – корпус; 2 – подрешетные балки; 3 – решетки колосниковые; 4 – амортизаторы; 5 – стенки дебалансов; 6 – дебалансы; 7 – опоры грохота); б – геометрическая модель машины и миграция собственных частот при утонении элементов конструкции

Для вибромашины важно иметь информацию не только о собственных частотах колебаний корпуса, но и о миграции спектра этих частот вследствие утонения стенок (вызывается абразивным износом при взаимодействии с частичками измельченного земляного кома и из-

влеченными из него отливками в условиях вибрации). Обращает на себя внимание практически линейный характер изменений собственных частот при моделировании утонения (вплоть до 30%) одновременно всех листов конструкции (рис. 7). Поскольку для вибромашин такого типа важно избегать близости к резонансным режимам, то становится очевидной ценность получаемой информации об изменении спектра собственных частот в процессе эксплуатации из-за износа и утонения стенок.

Предложенный в статье подход к анализу реакции НДС различных тел на малое утонение, в отличие от традиционной методики анализа чувствительности, предполагает прямую линейризацию по итогам серии расчетов с прямым возмущением конечноэлементных моделей. При этом реакция конечноэлементных моделей на малое конечное утонение исследуемого тела линейризуется в достаточно широких пределах с сохранением приемлемой точности. Справедливость данного утверждения продемонстрирована на примерах ряда стержней, пластинчатых и пластинчато-стержневых конструкций.

В результате оказывается возможным, проведя серию расчетов с прямым возмущением конечноэлементной модели при малых, но конечных значениях утонения α , получить набор реперных точек для построения линейризованной метамоделей НДС или спектра собственных частот исследуемого объекта. В отличие от аналогичных моделей, построенных на основе традиционных методик анализа чувствительности по теории малых возмущений, данные метамоделей демонстрируют более широкий диапазон применимости для ряда модельных задач, а также для реальных машиностроительных конструкций. Это обстоятельство дает возможность использовать создаваемые таким образом метамоделей не только для экспресс-анализа и оценочных предварительных расчетов, но и в качестве начальной базы для решения задач обоснования рациональных параметров проектируемых конструкций, а также отстройки или настройки на резонансные режимы. Важно, что эти метамоделей сохраняют для некоторых объектов точность вплоть до утонения на уровне 25 – 30% от номинальной толщины, площади сечения или объема, в то время как нормативно установленные предельные величины для многих типов машиностроительных конструкций – на уровне 20 – 25%.

В дальнейшем планируется развитие предложенного подхода и адаптация для исследования реакции напряженно-деформированного состояния и спектров частот собственных колебаний объектов транспортной техники, подъемно-транспортного оборудования, вибромашин, транспортных средств специального назначения и других типов машин, оборудования, сооружений на различные виды утонения. Кроме того, данный подход распространяем также и на случаи варьирования толщин или сечений исследуемых машиностроительных конструкций на этапе проектирования и технологической подготовки производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу; пер. с англ. под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
4. Гузь, А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
5. Штейнвольф, Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов / Л.И. Штейнвольф. - М.- Киев: Машгиз, 1961. – 340 с.
6. Симсон, Э.А. Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / Э.А. Симсон, С.А. Назаренко, М. В. Трохман // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2008. – 2/4 (32). – С. 44-47.
7. Голоскоков, Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – Киев: Наукова думка, 1966. – 335 с.
8. Гринев, В.Б. Оптимизация стержней по спектру собственных значений / В.Б. Гринев, А.П. Филиппов. – Киев: Наукова думка, 1979. – 211 с.

9. Fish, J. A First Course in Finite Elements PDF / J. Fish, T. Belytschko. – John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 336 p.
10. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. - М.: Физматлит, 2004. — 264 с.
11. Долинский, В.М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу / В.М. Долинский // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1975. – Вып. 21. – С. 43-49.
12. Долинский, В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии / В.М. Долинский // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. – Саратов, 1983. – С. 61-67.
13. Пронина, Ю.Г. Оценка долговечности упругой трубы под действием продольной силы и давления в условиях равномерной поверхностной коррозии / Ю.Г. Пронина // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – № 2. – С. 41-44.
14. Пронина, Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии / Ю.Г. Пронина // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Вып. 71. – С. 129-135.
15. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
16. Гусев, Ю.Б. Обоснование параметров высоконагруженных машин на основе моделирования напряженно-деформированного состояния с учетом деградации свойств основных элементов системы: дис.... канд. техн. наук / Ю.Б. Гусев. – Мариуполь, 2009. – 226 с.
17. Барчан, Е.Н. Усовершенствование методов расчета и конструирования выбивной транспортирующей машины для формовочных линий крупного литья: дис.... канд. техн. наук / Е.Н. Барчан. – Мариуполь, 2008. – 178 с.
18. Танченко, А.Ю. Влияние толщины панелей на спектр собственных частот колебаний корпусов транспортных средств специального назначения / А.Ю. Танченко // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков, 2013. – №23 (996). – С. 138-145.

Материал поступил в редколлегию 23.04.14.