

УДК621.891

В.П. Тихомиров, М.А. Измеров, П.В. Тихомиров

**ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ИНЖЕНЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Разработана фрактальная модель инженерной поверхности, позволяющая с определенной достоверностью описать нерегулярные и сложные объекты, в достаточной мере учесть большинство особенностей структуры поверхностного слоя шероховатой поверхности, а также использовать её при решении задач контактного взаимодействия.

Ключевые слова: фрактальные модели, инженерные поверхности, фрактальная размерность, самоподобие, самоаффинность, радиус вершины выступа, анизотропия.

Моделирование включает разработку моделей, с помощью которых можно эффективно выявить закономерности изучаемых процессов, в том числе проводимости и протекания среды через контакт в перпендикулярном и параллельном направлениях.

Важная роль в исследовании указанных процессов отводится поверхности и её характеристикам как функциональному модулю. Модель поверхности должна в достаточной мере отражать такие существенные характеристики поверхности, как макроотклонения, волнистость и шероховатость.

Для оценки параметров шероховатости разрабатываются соответствующие методы измерения и анализа с привлечением современных программных комплексов. Первые измерения параметров шероховатости относятся к 1930-м годам. Измерительная техника базировалась в основном на 2D-профилографах. Профиль поверхности ощупывался острием иглы при соответствующих увеличениях в горизонтальном и вертикальном направлениях. В 1980-х годах и позже использовались измерительные инструменты, позволившие визуализировать 3D-поверхность. Достаточная для анализа информация о поверхности была получена благодаря использованию измерительного комплекса, включающего программное обеспечение (K. Stout). Было выделено 14 так называемых «бирмингемских» параметров, характеризующих поверхность [1]. 3D-параметры поверхности нашли отражение в международном стандарте ISO 25178 (2007 г.). Однако этот стандарт не отвечает на вопрос, сколько параметров необходимо иметь, чтобы отразить функциональные свойства поверхности (например, герметичность). Некоторые исследователи (D.J. Whitehouse - Уайтхаус) полагают, что фрактальными свойствами обладают лишь некоторые поверхности: поверхности разлома (разрушения), а также поверхности хрупких материалов после той или иной обработки. Уайтхаус считает, что при обработке пластичных металлов (сталей) структура поверхностного слоя не имеет изломанности, характерной для фрактальных объектов.

Мы полагаем, что все поверхности, отличные от евклидовых с целыми размерностями, являются фрактальными, учитывая сложную структуру в разных масштабах. Для инженерной поверхности фрактальные свойства проявляются в диапазоне частот, когда зависимость плотности спектральной мощности от частоты, построенная в двойных логарифмических координатах, носит линейный характер.

**Изотропные поверхности.** Изотропной считается поверхность, характеристики которой при ее измерении в любом направлении являются идентичными. Если параметры, характеризующие поверхность, зависят от направления трассы измерения, то такая поверхность является анизотропной (рис. 1).

Изотропную поверхность можно описать с помощью преобразования Фурье и автокорреляционной функции АСФ, записанной в следующем виде:

$$ACF(\tau x, \tau y) = \iint_A z(x, y)z(x - \tau x, y - \tau y)dx dy / \iint_A z^2(x, y)dx dy.$$

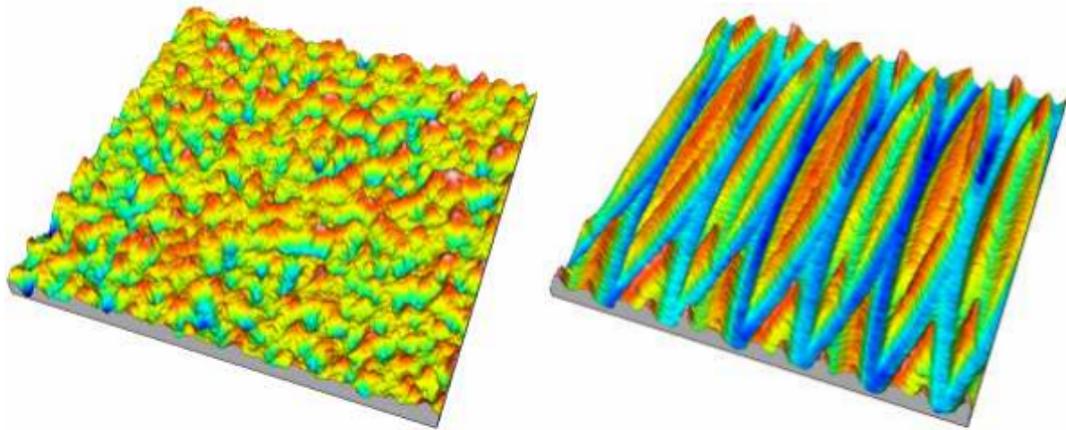


Рис. 1. Изотропная (слева) и анизотропная поверхности

Автокорреляционная функция (рис. 2) представляет собой пик высотой, равной единице, склоны которого имеют либо одинаковую форму - для изотропной поверхности, либо вытянутость в направлении следов обработки - для случая наличия анизотропии.

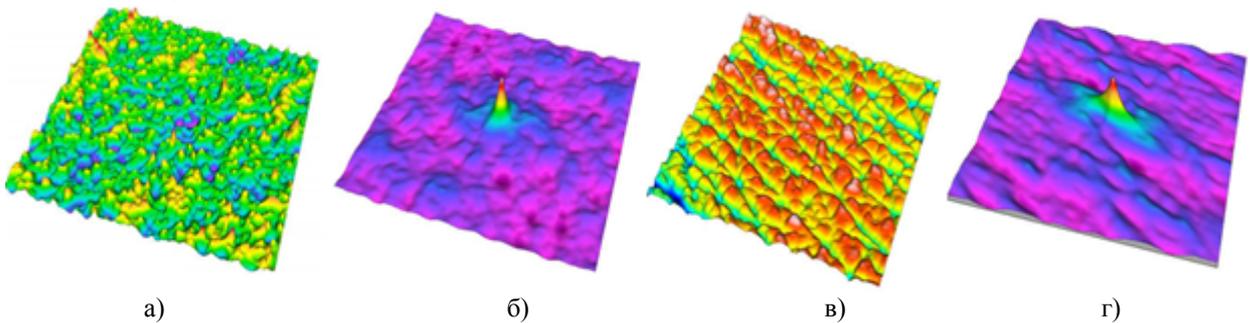


Рис. 2. Поверхности и их автокорреляционные функции:  
а, б – изотропные поверхности; в, г – анизотропные поверхности

Инженерные поверхности являются мультифрактальными объектами. Если разрезать поверхность  $z(x, y)$  плоскостями в вертикальном и горизонтальном (на определенном уровне) направлениях, то сечения будут иметь вид, представленный на рис. 3.

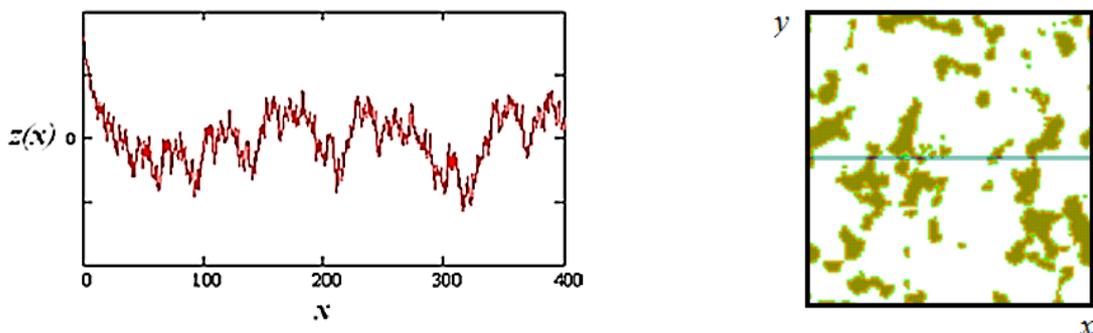


Рис. 3. Сечения поверхности: вертикальный разрез (слева); разрез горизонтальной плоскостью (справа)

В горизонтальном сечении срез выступов напоминает «острова». Полагают[2], что «острова» самоподобны. Для определения фрактальной размерности  $D_{xy}$  приемлемым является метод «периметр-площадь» (slit-island method – SIM).

При увеличении уровня среза «острова» увеличиваются в размере и появляются новые контуры «островов». Самоподобие проявляется в постоянстве фрактальной размерности (эффект русской матрешки). В модели Маджумдара-Бхушана [3] постулируется постоянство фрактальной размерности при увеличении сближения контактирующих поверхностей. Самоаффинные профили вертикального среза анизотропной поверхности во взаимно перпендикулярных направлениях  $ZOX$  и  $ZOY$  могут быть разными и характеризоваться своими фрактальными размерностями  $D_x$  и  $D_y$ . Оценку фрактальной размерности поверхности можно получить методом покрытия (триангуляционный метод), а профильные оценки - с использованием метода измерения кривой раствором циркуля (yardstick, compass, divider method).

Методы измерения фрактальной размерности представлены в таблице.

Таблица

Методы измерения фрактальной размерности

Метод	Логарифмическая шкала		Формула определения фрактальной размерности D
	Ось X	Ось Y	
Отрезков (divider, compass, yardstick)	Раствор циркуля – длина отрезка, концы которого лежат на кривой	Длина измеряемой кривой как сумма отрезков, умноженная на длину одного отрезка	$D=1$ - угловой коэффициент прямой (наклон прямой)
Покрывание кривой квадратной сеткой, покрытие поверхности или объемного объекта набором кубиков (boxcounting)	1/размер квадратной ячейки	Количество ячеек, покрывающих объект	$D=$ угловой коэффициент прямой (наклон прямой)
Триангуляции	Площадь отдельного треугольника, покрывающего участок поверхности	Отношение общей измеренной площади к минимальной (проекции) площади	$D=2$ - угловой коэффициент прямой (наклон прямой)
«Периметр – площадь» (slit island)	Периметр	Площадь	$D= 2/$ угловой коэффициент прямой (наклон прямой)
Плотности спектральной мощности (PSD)	Частота	Спектральная плотность	$D=(5 - \text{наклон прямой})/2$
Вариограмм	Шаг измерения (h - лаг)	Полувариограмма $\Gamma(h)$	$D=(4 - \text{наклон прямой})/2$

**Определение радиуса закругления вершины выступа неровности шероховатой поверхности.** Запишем функцию Вейерштрасса-Мандельброта [4] в виде

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L}\right)^{D-1} (\lg \gamma)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D-2)n} \left[ \cos \phi_{1n} - \cos \left(\frac{2\pi \gamma^n x}{L}\right) + \phi_{1n} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $z$  – высота поверхности;  $x$  – текущая длина трассы;  $D$  – фрактальная размер-

ность ( $1 < D < 2$ );  $\gamma$  – параметр масштаба ( $\gamma > 1$ ), определяющий спектральную плотность и свойство самоаффинности;  $L$  – длина, в пределах которой проявляются фрактальные свойства поверхности;  $\phi_{1n}$  – случайная величина, имеющая распределение в пределах от 0 до  $2\pi$ ;  $G$  – фрактальный параметр шероховатости;  $n$  – частотный индекс.

Параметр масштаба  $\gamma$  связан с частотой поверхности, равной величине, обратно пропорциональной шагу неровностей (по А. Маджумдару  $\gamma=1,5$ ). Фрактальный параметр шероховатости  $G$  в уравнении (1), имеющий размерность длины, является масштабом высот неровностей, не зависящим от частоты. Более грубая поверхность имеет большее значение  $G$ . Фрактальная размерность  $D$  характеризует низко- и высокочастотные компоненты профиля.

Для отдельного выступа (рис.4), приняв  $n=0$ ;  $\phi_{1n} = 0$ , запишем:

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L}\right)^{D-1} (\lg \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi\gamma^n x}{L}\right) \right].$$

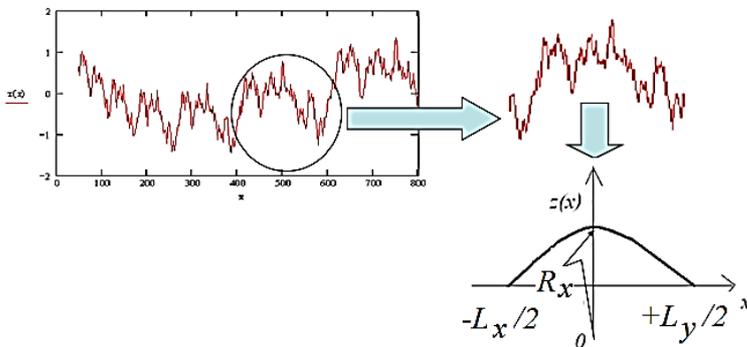


Рис. 4. Моделирование выступа

Для анизотропной поверхности радиус закругления выступа определяется выражением

$$R = \sqrt{R_x R_y}.$$

Найдем радиус вершины выступа в сечении  $ZOX$ :

$$R_x = \frac{1}{\left| \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}} = \frac{L_x}{\left(\frac{G_x}{L_x}\right)^{D_{zx}-1} (2\pi)^2 (\ln \gamma)^{1/2}}$$

Аналогичным образом выразим радиус закругления в сечении  $ZOY$ :

$$R_y = \frac{L_y}{\left(\frac{G_y}{L_y}\right)^{D_{zy}-1} (2\pi)^2 (\ln \gamma)^{1/2}}$$

Здесь  $L_x$  и  $L_y$  – размеры пятна контакта.

После несложных преобразований с учетом того, что

$$\pi L_x L_y = 4a,$$

где  $a$  – площадь пятна, получим

$$R = \frac{a^{\frac{1}{2}} (4/\pi)^{(D_{zx}-1)/2} L_x^{D_{zx}-D_{zy}}}{2\pi^{\frac{1}{2}} (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} G_x^{(D_{zx}-1)/2} G_y^{(D_{zy}-1)/2}}$$

Для изотропной поверхности при  $D_{zx}=D_{zy}=D$  и  $G_x=G_y=G$  имеем

$$R^* = \frac{a^{D/2}}{2^{2-D} \pi^{1+D/2} (\ln \gamma)^{1/2} G^{D-1}}$$

В ряде случаев трудно найти зависимость фрактальной размерности самоаффинной поверхности (если она вообще существует) от фрактальной размерности профиля (рис. 5).

Соотношение  $D_s=D+1$ , справедливое для самоподобной изотропной поверхности, не яв-

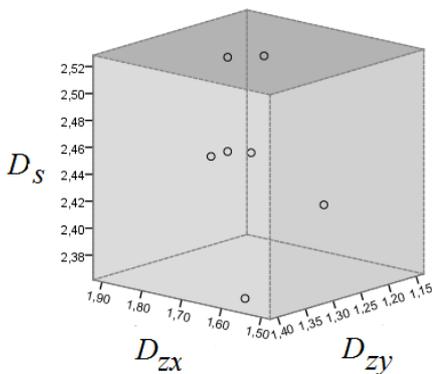


Рис. 5. Зависимость фрактальной размерности самоаффинной поверхности от фрактальной размерности профиля

ляется справедливым для самоаффинной анизотропной поверхности.

Для определения радиуса закругления вершины выступа необходимо знать следующие параметры: площадь пятна  $a$ ; фрактальные размерности  $D_{zx}$ ,  $D_{zy}$ ; фрактальные параметры шероховатости  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$ . Указанные параметры можно оценить при наличии информации о массиве ординат поверхности, на основе которой формируется поверхность. Затем, анализируя вариограммы, построенные в разных направлениях - вертикальных разрезах поверхности  $Z(X, Y)$ , находим минимальное и максимальное значения фрактальной размерности. Обозначим их  $D_{zy}$  и  $D_{zx}$ . Фрактальные параметры шероховатости  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$  по выбранным двум взаимно перпендикулярным направлениям определяются по формуле

$$G = [4(D - 2) \ln \gamma] Rq^{1/(D-1)} \left( \omega_{\min}^{(2-D)/(D-1)} - \omega_{\max}^{(2-D)/(D-1)} \right),$$

где  $Rq$  – среднее квадратическое отклонение ординат профиля в заданном направлении;  $\gamma = 1,5$ ; минимальная и максимальная частоты ( $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$ ) соответствуют проявлению фрактальных свойств.

Известная модель Гринвуда-Вильямсона (Г-В) [5] содержит три параметра: плотность выступов  $D_{sum}$ , плотность распределения высот выступов и радиус закругления верхней части выступов, который принят постоянным. В отличие от модели Г-В предлагаемая модель поверхности учитывает распределение площадей пятен контакта, при этом каждой площади касания соответствует свой радиус закругления. Плотность выступов фрактальной модели определяется зависимостью

$$D_{sum} = \frac{1}{A_a} \left( \frac{a_{max}}{a} \right)^{D_p/2}.$$

Здесь  $A_a$  – номинальная площадь;  $a_{max}$  – максимальная площадь единичного пятна контакта;  $D_p$  – фрактальная размерность, измеренная с помощью метода «периметр - площадь» «острова».

**Распределение площадок контакта.** Фундаментальное положение теории контактного взаимодействия о дискретности контакта предполагает наличие определенного распределения площадей пятен касания. Считается, что подобное распределение подчиняется универсальному степенному закону. Для более точной оценки параметров контактного взаимодействия шероховатых поверхностей наличие более мелких неровностей на выступе ограничивает использование распределения высот выступов. К тому же учет подобного распределения затруднителен для случая, когда число взаимодействующих выступов мало.

Вероятность того, что случайным образом взятое пятно будет иметь площадь больше  $a$ , равна

$$Pr(A > a) = F a^{-\beta}.$$

Расположим площади пятен в порядке уменьшения их размера. Выбрать одно такое пятно случайным образом с равномерным распределением означает выбрать один порядковый номер из списка. В этом случае можно заменить  $Pr(A > a)$  на  $N(A > a)$ .

Число пятен контакта определяется выражением

$$N(A > a) \propto \left( \frac{a}{a_{max}} \right)^{-\frac{D}{2}}.$$

Так как распределение площадок нагруженного контакта рассматривается относительно максимальной площадки касания  $a_{max}$ , то интегральную функцию распределения пятен представим в виде

$$F \left( \frac{a}{a_{max}} \right) \propto \left( \frac{a}{a_{max}} \right)^{\beta}.$$

Несмотря на структурную схожесть приведенных формул, их отличие состоит в том,

что число пятен определяется целым числом  $N \geq 1$ , а функция распределения  $F\left(\frac{a}{a_{max}}\right) \in [0,1]$ .

Обозначим через  $a^*$  относительную площадь, равную отношению площади пятна к максимальной площади касания:  $a^* = a/a_{max}$ .

Пусть плотность распределения относительной площади пятна контакта соответствует степенному закону

$$f(a^*) = C(a^*)^{-\alpha},$$

где  $0 < a_{min}^* \leq a^* \leq 1$ ,  $a_{min}^* = a_{min}/a_{max}$ . Логарифмируя уравнение плотности распределения, запишем:

$$\log f(a^*) = \log C - \alpha \log a^*.$$

Средний размер площади пятна контакта равен

$$\langle a^* \rangle = \int_{a_{min}^*}^1 C(a^*)^{-\alpha} \cdot a^* da^*.$$

Здесь  $a^*$  – переменная интегрирования.

Проинтегрировав последнее выражение, получим (при  $\alpha \neq 0$ )

$$\langle a^* \rangle = \frac{C}{2 - \alpha} [1 - (a_{min}^*)^{2-\alpha}].$$

Величину  $C$  найдем из условия нормировки

$$\int_{a_{min}^*}^1 C(a^*)^{-\alpha} da^* = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1 - \alpha}{1 - (a_{min}^*)^{1-\alpha}}.$$

Тогда площадь среднего пятна контакта (при бесконечно большом числе пятен  $N$  это математическое ожидание) находится из выражения

$$\langle a^* \rangle = \frac{1 - \alpha [1 - (a_{min}^*)^{2-\alpha}]}{2 - \alpha [1 - (a_{min}^*)^{1-\alpha}]}$$

Интегральная функция распределения (или просто функция распределения) определяется соотношением

$$F(a^*) = \int_{a_{min}^*}^{a^*} C(a^*)^{-\alpha} da^* = \frac{C}{1 - \alpha} [(a^*)^{1-\alpha} - (a_{min}^*)^{1-\alpha}] = \frac{(a^*)^{1-\alpha} - (a_{min}^*)^{1-\alpha}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\alpha}}.$$

Степенные законы распределения вероятностей называют распределениями с «тяжелыми хвостами», которые отбрасываются в случае принятия нормального закона распределения. Степенные законы распределения, являясь универсальными, отражают структуру и процессы, протекающие в сложных системах. Для более простых систем используют экспоненциальные законы распределения. Степенной закон распределения в двойных логарифмических координатах имеет вид прямой, что свидетельствует о скейлинговом поведении, т.е. об отсутствии выделенных масштабов и наличии фрактального поведения.

**Практическая реализация.** Используя функцию Вейерштрасса-Мандельброта, можно смоделировать шероховатые поверхности с разным масштабом по заданным характеристикам. В качестве исходных данных для моделирования фрактальных инженерных поверхностей по формуле (1) потребуются параметр фрактальной размерности  $D$ , размер площадки, на которой моделируется поверхность, масштаб по оси  $Z$ , масштаб в

плоскости  $XOY$ , регулирующий размер волны на заданной площади, а также две частоты,  $N$  и  $M$ , регламентирующие соотношение числа выступов во взаимно перпендикулярных направлениях в плоскости  $XOY$ .

На рис. 6 представлены фрактальные модели поверхностей, созданные по функции Вейерштрасса-Мандельброта. Следует отметить большое сходство этих моделей с реальными изотропными инженерными поверхностями, полученными разной механической обработкой.

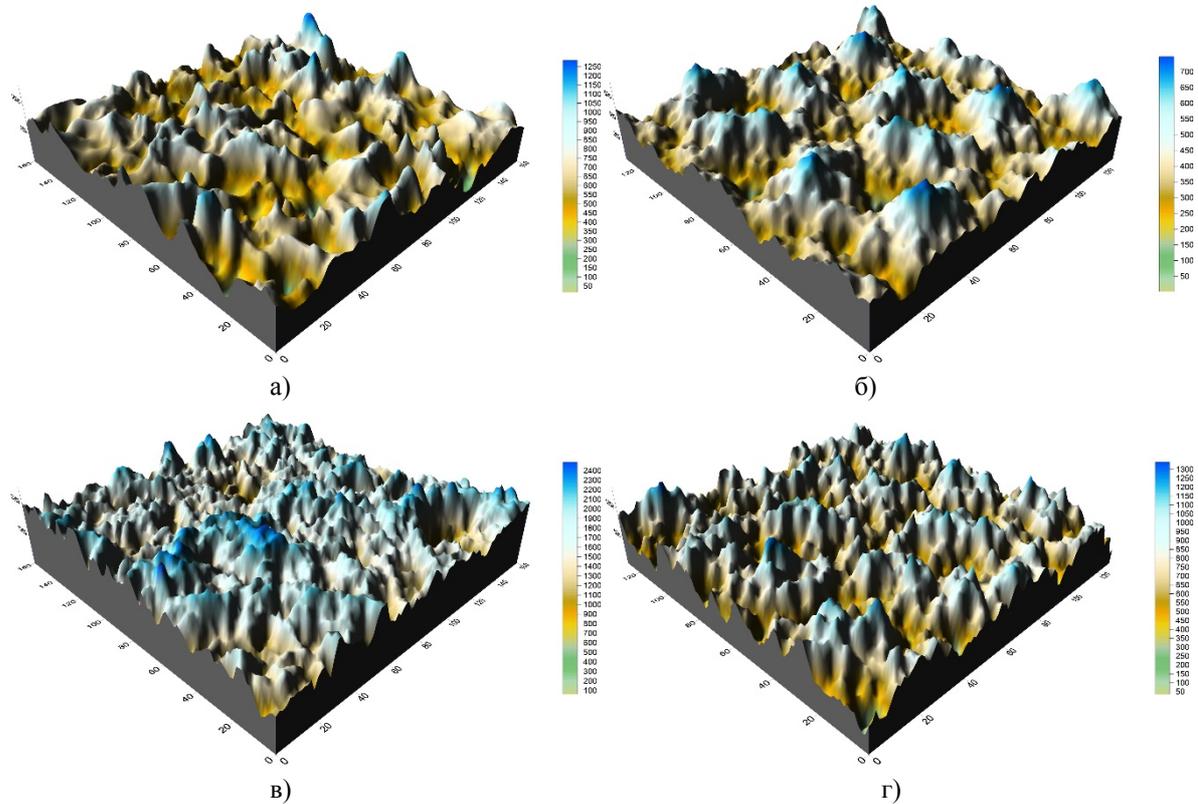


Рис. 6. 3D-карты поверхностей и их модели:  
а, в – реальные поверхности; б, г – модели со схожими характеристиками

Оценка фрактальной размерности поверхностей и их моделей проводится методом «периметр - площадь». Для этого делается срез поверхности на определённом уровне (например, 20% от самого высокого пика карты). При этом в плоскости среза образуются «острова». Если взять такой достаточно большой «остров» и измерить его периметр и площадь, можно оценить фрактальную размерность поверхности.

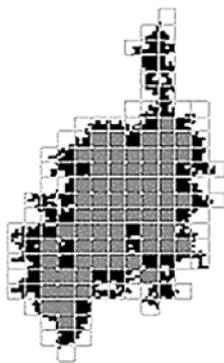


Рис. 7. Метод «периметр - площадь»

Процедура измерения «острова» заключается в следующем. Покрываем «остров» квадратной сеткой с размером ячейки  $\delta$ , равным максимальному размеру «острова» в каком-нибудь направлении. При этом средством измерения площади и периметра «острова» является эта квадратная сетка. Очевидно, что в данном случае мы имеем очень грубую оценку параметров исследуемого «острова». Но если постепенно уменьшать размер сетки, то на каждом этапе можно всё точнее определять параметры «острова» (рис. 7).

Нижней границей размера сетки является разрешающая способность карты исследуемой поверхности. Если полученные значения периметра и площади представить в логарифмических координатах, то фрактальную размерность можно найти через угловой коэффициент

ент  $k$  прямой, проведённой через полученные значения:

$$D = 2 / k.$$

Тогда фрактальную размерность поверхности  $D_s$  находят так:

$$D_s = D + 1.$$

Считается, что все «острова», образующиеся при горизонтальном срезе поверхности, самоподобны и имеют одну и ту же фрактальную размерность. Принимая во внимание то, что поверхность представляет собой случайное поле, для более достоверной оценки необходимо проанализировать все имеющиеся «острова» и рассчитать среднее значение фрактальной размерности (рис. 8).

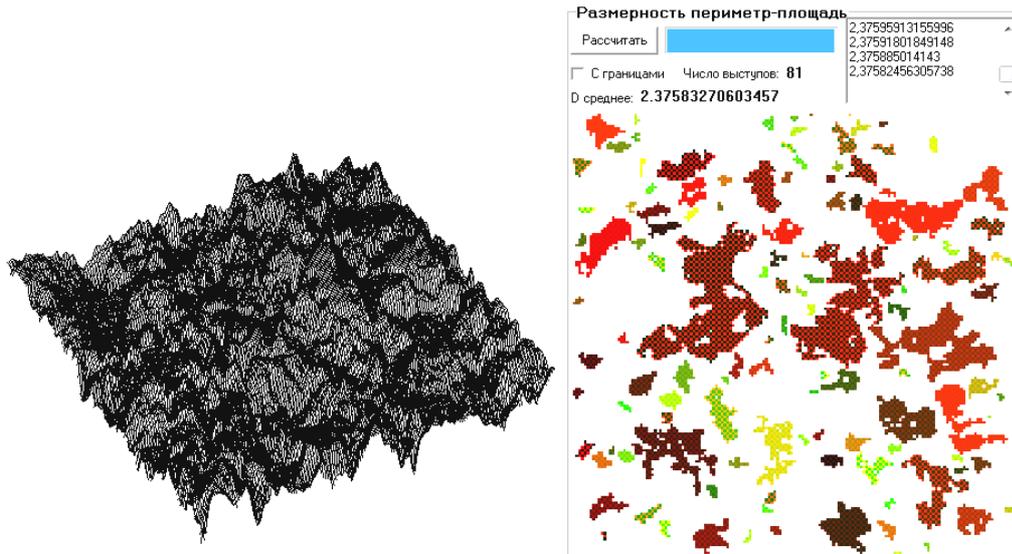


Рис. 8. Выявление «островов» и их оценка методом «периметр-площадь»

Более того, имеется некоторая разбежка значений фрактальной размерности на разных уровнях среза горизонтальной плоскостью, что тоже необходимо учитывать. В нашем случае оценка проводится для той части поверхности, которая непосредственно может находиться в контакте при реальном взаимодействии тел (до средней плоскости).

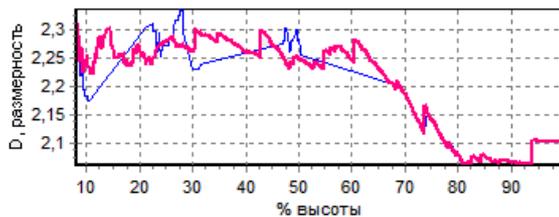


Рис. 9. Зависимость фрактальной размерности от высоты среза

На рис. 9 представлен график разброса значений фрактальной размерности в зависимости от высоты среза. После 60% высоты среза от самой высокой точки карты «острова» постепенно сливаются в один большой, и измерять в этом случае нужно не металл, а пустоты, или поры.

Функция распределения пятен контакта шероховатой поверхности при определённом сближении её с гладким штампом имеет степенную зависимость, что подтверждает представленную теорию. Также было проведено несколько компьютерных экспериментов с разными реальными поверхностями и моделями. Сближение шероховатой поверхности со штампом проводилось до достижения максимального числа пятен контакта, и определялась функция распределения пятен контакта. Проверка согласия по критерию А.Н. Колмогорова показала, что подобранная степенная функция распределения пятен контакта является приемлемой с параметрами  $d = 0,042 \ll d_{кр} = 0,159$ .

На рис. 10 показан результат анализа распределения пятен контакта реальной шероховатой поверхности по представленному алгоритму. В нижней правой части приведен график эмпирической функции распределения и подбираемой теоретической функции

распределения (гладкая кривая). Функция распределения для данного случая имеет вид

$$F(a^*) = (a^*)^{1-\alpha} = (a^*)^{0,489}.$$

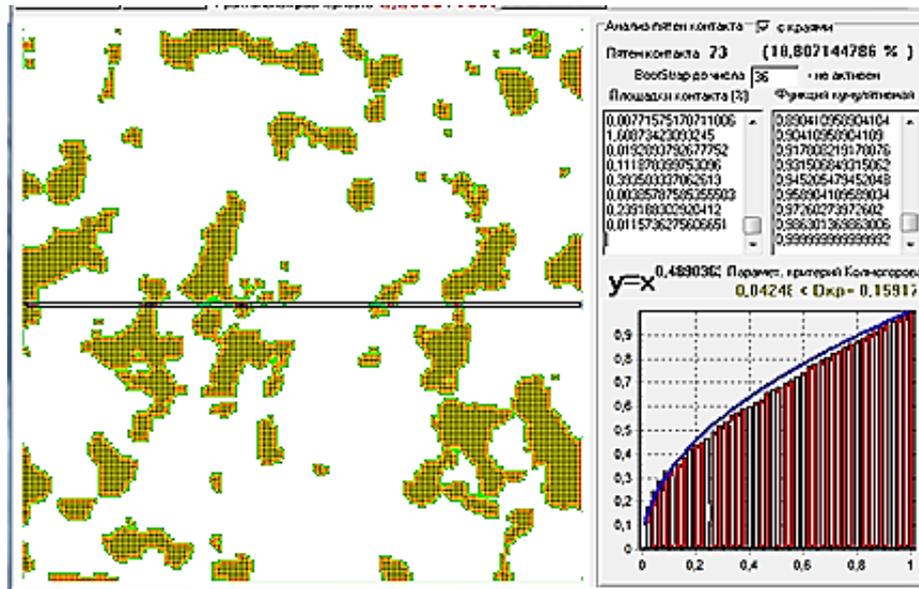


Рис. 10. Функция распределения пятен контакта шероховатой поверхности

Выводы:

1. Предложена модель фрактальной поверхности, учитывающая распределение пятен контакта и радиусов закругления вершин выступов, соответствующих площади пятен.
2. Поверхность рассматривается как мультифрактальный объект, которому одновременно присущи самоподобие и самоаффинность.
3. Рассмотрены методики определения фрактальной размерности для самоподобных объектов в результате горизонтального среза и для самоаффинных объектов – по профилю поверхности.
4. Разработано программное обеспечение и способ визуализации изотропных и анизотропных фрактальных поверхностей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stout, K. Three-Dimensional Surface Topography, Second Edition (Ultra Precision Technology)/K. J. Stout, L. Blunt. – London: Penton Press, 2000. – 285p.
2. Cox, B.L. Fractal surface: measurement and application in earth science/ B.L. Cox, JS.Y. Wang//Symmetry: Culture and Science.- 1993. – V. 4.-№ 3. – P. 243-283.
3. Majumdar, A. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces/A. Majumdar, B. Bhushan// Trans. ASME, JournalofTribology.- 1990. –V. 112. – P. 205-216.
4. Wang, S. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime. Part 1. Elastic contact and heat transfer analysis / S.Wang, K. Komvopoulos // Trans. ASME, Journal of Tribology.- 1994. – V.116. – P. 812 – 823.
5. Greenwood, J.A. Contact of nominally flat surfaces/J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson//Proc. R. Soc. Lond. A 295 (1966). – P. 300–319.

Материал поступил в редколлегияу 7.05.14.