

Научная статья

Статья в открытом доступе

УДК 621.822

doi: 10.30987/2782-5957-2026-1-22-32

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ РОТОРНЫХ СИСТЕМ С КОНИЧЕСКО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОДШИПНИКАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Тхай Ха Нгуен<sup>1✉</sup>, Ифань Лю<sup>2</sup>, Юрий Николаевич Казаков<sup>3</sup>, Кирилл Константинович Настепанин<sup>4</sup>, Леонид Алексеевич Савин<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4,5</sup> Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (ОГУ), Орел, Россия

<sup>1</sup> havcn@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0005-5463-7722>

<sup>2</sup> liuyifan0094@qq.com, <https://orcid.org/0009-0009-5192-8523>

<sup>3</sup> kazakyurii@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9655-4520>

<sup>4</sup> nastepanin02@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7167-0752>

<sup>5</sup> savin3257@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0109-4200>

### Аннотация

Цель исследования. Исследование направлено на разработку методики точного прогнозирования критических частот и оценки устойчивости высокоскоростных роторных систем, поддерживаемых коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения (КЦПС) – перспективным техническим решением для комбинированных радиальных и осевых нагрузок. Ключевой целью является установление взаимосвязи между геометрическими и эксплуатационными параметрами подшипника и динамическими характеристиками системы.

Результаты исследования. На основе гидродинамической модели предложен и реализован подход к определению коэффициентов жесткости и демпфирования смазочного слоя в КЦПС. Полученные динамические коэффициенты были интегрированы в модель ротора для проведения мо-

дального анализа и анализа устойчивости по критерию Рауса-Гурвица. Результаты расчетов позволили количественно определить зависимость динамических коэффициентов от эксплуатационных параметров, идентифицировать первые критические частоты и построить диаграммы устойчивости системы.

Выводы. На основе результатов исследования даны рекомендации по выбору оптимальной конструкции и безопасной эксплуатации роторов в турбомашине с учетом основных требований к диапазону критических частот, уровню устойчивости и комбинированной грузоподъемности КЦПС.

**Ключевые слова:** скорость, подшипник, устойчивость, коэффициенты, жесткость, уравнение Рейнольдса, критерий Рауса-Гурвица.

**Финансирование:** Исследование выполнено в рамках гранта Российского научного фонда № 22-19-00789-П, <https://rscf.ru/project/22-19-00789/>.

Ссылка для цитирования:

Тхай Ха Нгуен. Определение критических частот роторных систем с коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения на основе анализа динамических коэффициентов / Тхай Ха Нгуен, Ифань Лю, Ю.Н. Казаков, К.К. Настепанин, Л.А. Савин // Транспортное машиностроение. – 2026. – № 1. – С. 22-32. doi: 10.30987/2782-5957-2026-1-22-32.

Original article

Open Access Article

## DETERMINATION OF CRITICAL FREQUENCIES OF ROTARY SYSTEMS WITH CONICAL-CYLINDRICAL SLIDING BEARINGS BASED ON THE ANALYSIS OF DYNAMIC COEFFICIENTS

Thai Ha Nguyen<sup>1✉</sup>, Yifan Liu<sup>2</sup>, Yury Nikolaevich Kazakov<sup>3</sup>, Kirill Konstantinovich Nastepanin<sup>4</sup>, Leonid Alekseevich Savin<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4,5</sup> Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

<sup>1</sup> havcn@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0005-5463-7722>

<sup>2</sup> liuyifan0094@qq.com, <https://orcid.org/0009-0009-5192-8523>

<sup>3</sup> kazakyurii@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9655-4520>

<sup>4</sup> nastepanin02@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7167-0752>

<sup>5</sup> savin3257@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0109-4200>

## Abstract

The study objective. The research is aimed at developing a technique for accurately predicting critical frequencies and assessing the stability of high-speed rotary systems supported by conical-cylindrical sliding bearings (CCSB), a promising technical solution for combined radial and axial loads. The key goal is to establish the relationship between the geometric and operational parameters of the bearing and the dynamic characteristics of the system.

Study results. Based on the hydrodynamic model, an approach to determining the coefficients of stiffness and damping of the lubricating layer in CCSB is proposed and implemented. The obtained dynamic coefficients were integrated into the rotor model to perform modal analysis and stability analysis according

to Routh-Hurwitz criterion. The calculation results made it possible to quantify the dependence of dynamic coefficients on operational parameters, identify the first critical frequencies, and construct diagrams of system stability.

Conclusions. Based on the results of the study, recommendations are given on the choice of an optimal design and safe operation of rotors in turbomachines, taking into account the main requirements for the range of critical frequencies, the level of stability and the combined load capacity of CCSB.

**Keywords:** speed, bearing, stability, coefficients, stiffness, Reynolds equation, Routh-Hurwitz criterion.

**Funding:** This paper is funded by the grant of the Russian Science Foundation No22-19-00789-П, <https://rscf.ru/project/22-19-00789/>.

## Reference for citing:

Nguyen ThH, Liu Yi, Kazakov YuN, Nastepanin KK, Savin LA. Determination of critical frequencies of rotary systems with conical-cylindrical sliding bearings based on the analysis of dynamic coefficients. *Transport Engineering*. 2026;1:22-32. doi: 10.30987/2782-5957-2026-1-22-32.

## Введение

Современное машиностроение характеризуется устойчивой тенденцией к созданию высокоскоростных и высоконагруженных роторных систем, которые находят широкое применение в энергетическом, авиационном и насосном оборудовании [1, 2]. Одной из ключевых проблем при проектировании таких систем является обеспечение динамической устойчивости и виброненадежности. Эксплуатация вблизи или на критических частотах вращения, сопровождающаяся резонансными явлениями, может привести к недопустимо большим амплитудам колебаний, контакту ротора с элементами корпуса и, как следствие, к катастрофическим отказам [3, 4]. В этой связи задача точного прогнозирования критических частот и границ устойчивой работы является первостепенной для обеспечения надежной и безопасной эксплуатации турбомашин.

Анализ современных исследований в области динамики роторов показывает значительный научный интерес к под-

шипникам скольжения как к элементам, существенно влияющим на динамическое поведение системы [5, 6]. На сегодняшний день динамические характеристики радиальных цилиндрических [7, 8] и конических [9, 10] подшипников скольжения изучены достаточно глубоко. Разработаны методики расчета их статических и динамических коэффициентов, проведен анализ устойчивости. Однако комбинированные коническо-цилиндрические подшипники скольжения (КЦПС), способные одновременно воспринимать значительные радиальные и осевые нагрузки в условиях ограниченных габаритов, исследованы в значительно меньшей степени [11, 12]. В особенности это касается комплексного подхода, связывающего расчет полных матриц динамических коэффициентов жесткости и демпфирования КЦПС с последующим определением на их основе критических частот роторной системы [13]. Существующий пробел в литературе обусловлен сложностью математического моделирования гидроди-

намики в подшипнике со сложной геометрией и необходимостью учета взаимного влияния его конической и цилиндрической частей [14, 15].

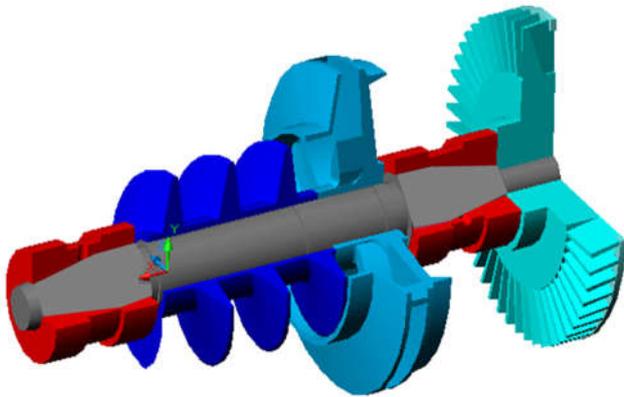


Рис. 1. 3D-модель ротора с коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения  
*Fig. 1. 3D model of a rotor with tapered-cylindrical plain bearings*

Таким образом, целью настоящей работы является разработка интегрированной математической модели для точного прогнозирования критических частот и оценки устойчивости роторной системы, поддерживаемой коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: 1) Разработка гидродинамической модели КЦПС на основе численного решения уравнения Рейнольдса для смазочного слоя с учетом геометрических особенно-

### Модели и методы

Модальный анализ роторных систем, как правило, основан на линейной модели, в которой внешние силы, демпфирование и различные виды нелинейностей, включая механико-термические свойства материалов, контактные условия и конечные перемещения узлов, не учитываются. В этом случае уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{q} + k\dot{q} = 0; \quad (1)$$

где  $m$  – масса ротора,  $k$  – коэффициент жёсткости, а  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  – соответственно перемещение, скорость и ускорение.

стей конструкции; 2) Расчет интегральных характеристик (несущей способности, мощности потерь) и, что наиболее важно, полных матриц динамических коэффициентов жесткости и демпфирования подшипника [16]; 3) Интеграция полученных коэффициентов в уравнения движения ротора и проведение модального анализа системы; 4) Определение критических частот вращения и анализ устойчивости роторной системы с использованием критерия Рауса-Гурвица; 5) Исследование влияния ключевых геометрических и эксплуатационных параметров (угла конусности  $\alpha$ , радиального зазора  $h$ , угловой скорости  $\omega$ ) на динамические характеристики системы [17, 18].

На рис. 1 представлена 3D-модель ротора с коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения, разработанная для последующего численного и модального анализа. Модель отражает конструктивные особенности исследуемой роторной системы и используется как основа для расчётных экспериментов.

Научная новизна исследования заключается в комплексном подходе к определению критических частот роторных систем с КЦПС, основанном на анализе полных матриц их динамических коэффициентов жесткости и демпфирования, что ранее в литературе не освещалось.

Таким образом, модальный анализ является основой для динамических расчетов роторных систем. В расширенной модели учитываются все основные факторы, включая гироскопические эффекты, возникающие при вращении ротора. Учет сил Кориолиса позволяет более точно определить собственные частоты и формы колебаний, особенно при повышенных скоростях вращения, когда влияние этих сил становится существенным.

В данной работе рассматривается задача расчета собственных частот ротора с учетом динамических коэффициен-

тов опор и гироскопических эффектов, что обеспечивает более полную оценку влияния геометрии конических подшип-

ников на динамические характеристики системы. В этом случае общее уравнение движения принимает следующий вид:

$$[M][\ddot{q}] + ([C + C_c])\dot{q} + ([K + K_c])q = \{F\}, \quad (2)$$

где  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  – матрицы масс, демпфирования и жесткости;  $[C_c]$  – матрица демпфирования с учетом сил Кориолиса;  $[K_c]$  – матрица изменения жесткости при вращении;  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  – обобщенные перемещения, скорости и ускорения точек расположения дискретных элементов;  $\{F\}$  – матрица действующих нагрузок.

Собственные частоты ротора существенно зависят от частоты вращения вследствие гироскопических эффектов и нелинейных свойств смазочного слоя. Для анализа таких зависимостей широко используется диаграмма Кэмпбелла, отображающая изменение собственных частот при изменении скорости вращения. Настоящая работа посвящена определению собственных частот ротора с коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения, с учётом кориолисовых составляющих. Научная новизна исследования заключается в рассмотрении системы опор, воспринимающих одновременно радиальные и осевые нагрузки, что ранее не освещалось в литературе. Для адекватного описания упругих и демпфирующих свойств смазочного слоя используются динамические коэффициенты, характеризующие гидродинамические силы как линейные функции перемещений и скоростей центра вала. Такой подход является корректным при малых эксцентриситетах  $e = e/h_0 \leq 0,35$ , когда зависимость «несущая способность – перемещение» может считаться линейной.

На рис. 2 представлена динамическая модель КЦПС. Модель учитывает взаимодействие ротора с опорой через упругие и демпфирующие элементы, характеризующие коэффициентами жёсткости и демпфирования в трёх взаимно перпендикулярных направлениях. Такая схема используется для определения ди-

намических коэффициентов, описывающих поведение смазочного слоя при малых перемещениях вала.

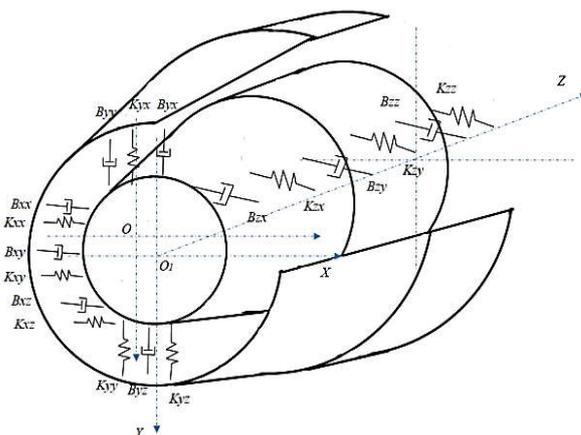


Рис. 2. Динамическая модель КЦПС  
Fig. 2. Dynamic model of the KCTPS

При выполнении одновременного расчетного моделирования для конического сечения подшипника, параллельного цилиндрическому сечению подшипника, применяем формулу:

$$\begin{cases} K = K_c + K_k \\ B = B_c + B_k \end{cases} \quad (3)$$

Матрица  $K$  характеризует упругость, а матрица  $B$  – демпфирующие свойства смазочного слоя. Элементами матриц  $K$  и  $B$  являются коэффициенты  $K_{xx}$ ,  $K_{xy}$ , ...,  $B_{xx}$ ,  $B_{xy}$ , ... – частные производные, вычисленные в положении равновесия. Знаки минус возле матриц  $K$  и  $B$  указывают на дополнительные силы, направленные противоположно направлению смещения и скорости, их вызвавших [18]. В этом случае выражение реакции смазочного слоя, действующего при малых возмущениях координат и скорости, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_X = R_{X_0} + \left(\frac{\partial R_X}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial R_X}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y + \left(\frac{\partial R_X}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z + \left(\frac{\partial R_X}{\partial \dot{X}}\right)_0 \Delta \dot{X} + \\ \quad \left(\frac{\partial R_X}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \Delta \dot{Y} + \left(\frac{\partial R_X}{\partial \dot{Z}}\right)_0 \Delta \dot{Z}; \\ R_Y = R_{Y_0} + \left(\frac{\partial R_Y}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial R_Y}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y + \left(\frac{\partial R_Y}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z + \left(\frac{\partial R_Y}{\partial \dot{X}}\right)_0 \Delta \dot{X} + \\ \quad \left(\frac{\partial R_Y}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \Delta \dot{Y} + \left(\frac{\partial R_Y}{\partial \dot{Z}}\right)_0 \Delta \dot{Z}; \\ R_Z = R_{Z_0} + \left(\frac{\partial R_Z}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial R_Z}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y + \left(\frac{\partial R_Z}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z + \left(\frac{\partial R_Z}{\partial \dot{X}}\right)_0 \Delta \dot{X} + \\ \quad \left(\frac{\partial R_Z}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \Delta \dot{Y} + \left(\frac{\partial R_Z}{\partial \dot{Z}}\right)_0 \Delta \dot{Z}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Отрицательные знаки при матрицах  $K$  и  $B$  показывают, что дополнительные силы противоположны по направлению перемещениям и скоростям. Элементы матриц жесткости и демпфирования рассчитываются в положении равновесия:

$$K_{ij} = -\left(\frac{\partial R_i}{\partial j}\right)_0; B_{ij} = -\left(\frac{\partial R_i}{\partial \dot{j}}\right)_0 \quad (5)$$

Выражение (4) можно записать в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} R_X = R_{X_0} - K_{XX}\Delta X - K_{XY}\Delta Y - K_{XZ}\Delta Z - B_{XX}\Delta \dot{X} - B_{XY}\Delta \dot{Y} - B_{XZ}\Delta \dot{Z} \\ R_Y = R_{Y_0} - K_{YX}\Delta X - K_{YY}\Delta Y - K_{YZ}\Delta Z - B_{YX}\Delta \dot{X} - B_{YY}\Delta \dot{Y} - B_{YZ}\Delta \dot{Z} \\ R_Z = R_{Z_0} - K_{ZX}\Delta X - K_{ZY}\Delta Y - K_{ZZ}\Delta Z - B_{ZX}\Delta \dot{X} - B_{ZY}\Delta \dot{Y} - B_{ZZ}\Delta \dot{Z} \end{array} \right. \quad (6)$$

Тогда дополнительные реакции смазочного слоя можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta R_X \\ \Delta R_Y \\ \Delta R_Z \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} \Delta \dot{X} \\ \Delta \dot{Y} \\ \Delta \dot{Z} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{ZX} & K_{ZY} & K_{ZZ} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} & B_{XZ} \\ B_{YX} & B_{YY} & B_{YZ} \\ B_{ZX} & B_{ZY} & B_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Рассмотренные зависимости учитывают нелинейные свойства смазочного слоя, в частности изменение жёсткости плёнки при смещении оси вала. Из-за нелинейного характера взаимодействия изменение положения ротора приводит к несовпадению направлений силовых векторов, что отражается в наличии перекрёстных коэффициентов жёсткости  $K_{ij}$ , характеризующих взаимное влияние переме-

ний по взаимно перпендикулярным направлениям. Аналогичная ситуация наблюдается и для коэффициентов демпфирования, возникающих при изменении скорости вала. Методика определения динамических коэффициентов КЦПС в [16]. Для расчёта коэффициентов жёсткости и демпфирования применяются выражения вида:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= -\frac{R_X(X_0; Y_0 + \Delta Y; Z_0; 0; 0; 0) - R_X(X_0; Y_0 - \Delta Y; Z_0; 0; 0; 0)}{2\Delta Y} \\ B_{YZ} &= -\frac{R_Y(X_0; Y_0; Z_0; 0; 0; 0 + \Delta \dot{Z}) - R_Y(X_0; Y_0; Z_0; 0; 0; 0 - \Delta \dot{Z})}{2\Delta \dot{Z}} \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичные соотношения используются для всех остальных динамических коэффициентов. На основе представленных выражений разработаны алгоритмическая и программная модели, проведен комплекс вычислительных экспериментов. Были получены зависимости несущей способности и динамических коэффициентов конического гидростатодинамического подшип-

На основе представленных соотношений разработана алгоритмическая и программная модели, проведен комплекс вычислительных экспериментов. Были получены зависимости несущей способности и динамических коэффициентов конического гидростатодинамического подшип-

ника при смазке водой с жиклерным дроселированием, прямоугольными питающими камерами и следующими геометрическими параметрами:  $B_k = B_c = 15$  мм,  $R_1 = 11$  мм. Расчетные схемы конического

подшипника скольжения и вала роторной машины  $R_2 = 14$  мм,  $L = 274$  мм представлены на рис. 2, 3. Расчетные полученные значения коэффициентов жёсткости и демпфирования приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты жесткости и демпфирования

Table 1

*Stiffness and damping coefficients*

Коэффициент	5 град	10 град	15 град	Коэффициент	5 град	10 град	15 град
$K_{XX} (H/M)$	2.85E+06	2.52E+06	2.20E+06	$B_{XX} (H\cdot c/m)$	3.55E+04	3.15E+04	2.74E+04
$K_{YX} (H/M)$	-1.75E+07	-1.62E+07	-1.50E+07	$B_{YX} (H\cdot c/m)$	-5.40E+03	-4.87E+03	-4.34E+03
$K_{ZX} (H/M)$	0	0	0	$B_{ZX} (H\cdot c/m)$	0	0	0
$K_{XY} (H/M)$	1.75E+07	1.62E+07	1.50E+07	$B_{XY} (H\cdot c/m)$	5.40E+03	4.87E+03	4.34E+03
$K_{YY} (H/M)$	2.85E+06	2.52E+06	2.20E+06	$B_{YY} (H\cdot c/m)$	3.55E+04	3.15E+04	2.74E+04
$K_{ZY} (H/M)$	0	0	0	$B_{ZY} (H\cdot c/m)$	0	0	0
$K_{XZ} (H/M)$	0	0	0	$B_{XZ} (H\cdot c/m)$	0	0	0
$K_{YZ} (H/M)$	0	0	0	$B_{YZ} (H\cdot c/m)$	0	0	0
$K_{ZZ} (H/M)$	1.50E+03	7.50E+03	3.00E+04	$B_{ZZ} (H\cdot c/m)$	-5.00E+02	-8.00E+02	-1.13E+03

Примечание: Наблюдаемое уменьшение коэффициентов жесткости  $K_{XX}$ ,  $K_{YY}$  с ростом угла  $\alpha$  объясняется изменением геометрии зазора и перераспределением гидродинамического давления. Значительная величина перекрестных коэффициентов  $K_{XY}$ ,  $K_{YX}$  указывает на сильную связь между перемещениями в направлениях  $X$  и  $Y$ . Динамические коэффициенты из табл. 1 были заданы в ANSYS как упруго-демпфирующие элементы в узлах крепления подшипников.

Данные рисунки представляют собой взаимосвязанные этапы анализа механической системы, включающей вал и его опоры. Рис. 3 показывает конструкцию коническо-цилиндрического подшипника скольжения, который служит опорой для вала. Этот подшипник, обеспечивая минимальное трение и надёжное центрирование, создаёт условия для вращения вала.

Далее, рис. 4 непосредственно анализирует динамическое поведение этого вала в опорах. На его расчётной схеме изображены возможные формы изгибных колебаний, которые возникают при работе.

Значения динамических коэффициентов были использованы для определения собственных частот изгибных и крутильных колебаний (табл. 2, 3). Расчеты проводились с использованием системы ANSYS для значений углов конусности 5, 10 и 15 градусов.

При изменении угла конусности  $\alpha$  размеры остаются прежними, за исключением соотношения  $B_k/B_c$ . Данное программное обеспечение позволяет построить собственные формы и рассчитать

значения собственных частот и изгибных и крутильных колебаний. В основу расчета положен метод начальных параметров, позволяющий определить линейные и угловые перемещения при изгибе и кручении многоступенчатых балок с учетом переменных инерционных нагрузок и поперечных сечений вала.

На рис. 5 представлены результаты модального анализа трубы КЦПС, выполненного в программной среде ANSYS при угле наклона  $\alpha = 15^\circ$ .

Моделирование позволило определить три первые собственные формы колебаний конструкции, соответствующие первым трём собственным частотам. На рисунках показаны распределения полной деформации (*Total Deformation*) для каждой из мод. Цветовая шкала отражает амплитуду перемещений: красные области характеризуют максимальные значения деформации, а синие – минимальные. Первая мода (*Mode 1*) демонстрирует основное изгибное колебание трубы, вторая мода (*Mode 2*) имеет более сложный характер с изменением направления изгиба, а третья мода (*Mode 3*) характеризуется сочетанием изгибных и крутильных форм

колебаний. Полученные результаты позволяют оценить динамическое поведение трубы КЦПС при заданных условиях и

определить критические зоны концентрации деформаций.

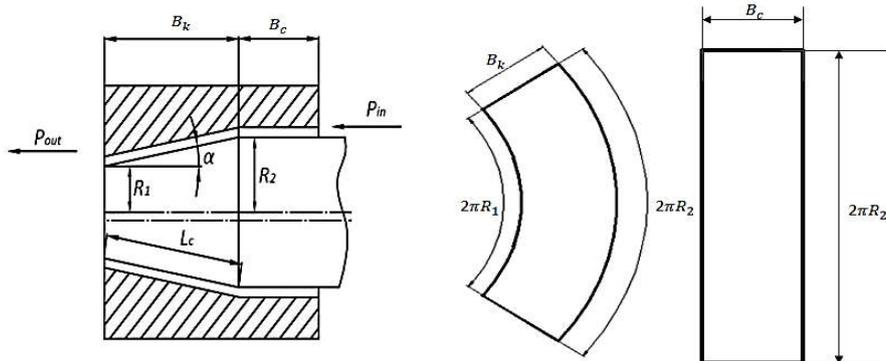


Рис. 3. Схема коническо-цилиндрического подшипника скольжения  
Fig. 3. Diagram of a conical-cylindrical plain bearing

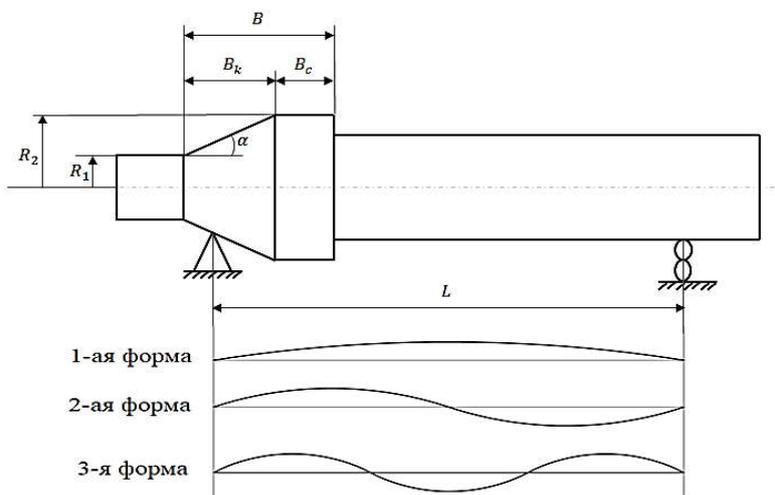


Рис. 4. Расчетная схема вала и формы колебаний  
Fig. 4. Calculation diagram of the shaft and vibration modes

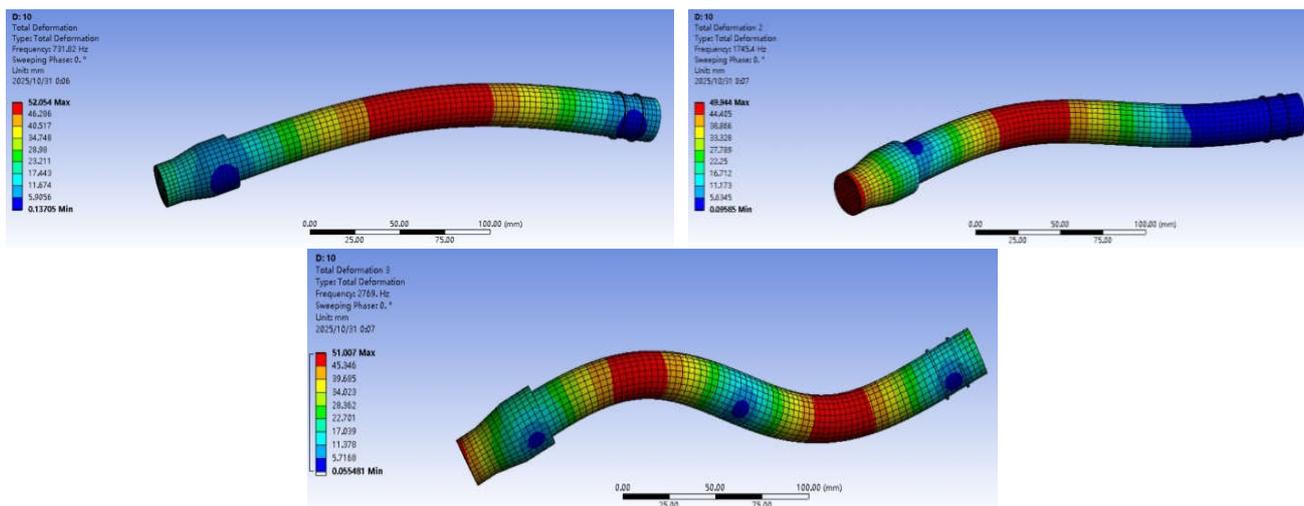


Рис. 5. Модальное моделирование трубы КЦПС в программе ANSYS при угле наклона  $\alpha = 15^\circ$ , соответствующее трём собственным частотам (1-й, 2-й, 3-й моды)  
Fig. 5. Modal modeling of a KTSPS pipe in the ANSYS program at an inclination angle of  $\alpha = 15^\circ$ , corresponding to three natural frequencies (1st, 2nd, 3rd modes)

## Результаты расчета

В результате проведённого модального анализа были получены собственные частоты и формы колебаний трубы КЦПС при различных углах наклона  $\alpha = 5^\circ, 10^\circ$  и  $15^\circ$ . Из расчётов видно, что с увеличением угла конуса наблюдается уменьшение жёсткости опорной системы, что приводит к снижению значений собственных частот как изгибных, так и крутильных мод.

Наиболее чувствительными к изменению геометрии оказались вторые и третьи формы колебаний, характеризующиеся

сложной комбинацией изгибных и крутильных деформаций. Совпадение полученных результатов с данными, рассчитанными в ANSYS, подтверждает корректность построенной модели и применённого метода анализа. Таким образом, проведённые расчёты позволяют оценить влияние геометрических параметров подшипников КЦПС на динамическое поведение ротора. Основные результаты моделирования в ANSYS обобщены и проанализированы в табл. 2, 3.

Таблица 2

Собственные частоты изгибных колебаний

Table 2

*Natural frequencies of bending vibrations*

Номер	5	10	15
	Частота, Гц		
1	730.59	729.38	692.58
2	1859.7	1753.9	1110.8
3	2766.5	2671.9	2579.9

Таблица 3

Собственные частоты крутильных колебаний

Table 3

*Natural frequencies of torsional vibrations*

Номер	5	10	15
	Частота, Гц		
1	731.80	731.13	692.93
2	1850.17	1746.50	1105.70
3	2673.17	2768.17	2761.67

На рис. 6 представлены зависимости собственных частот изгибных (а) и крутильных (б) колебаний ротора от угла конуса конических подшипников скольжения ( $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ ). Для каждой из трёх мод наблюдается тенденция к снижению

частоты при увеличении угла  $\alpha$ , что связано с уменьшением жёсткости опор и перераспределением нагрузок в смазочном слое. Наиболее заметное изменение характерно для второй моды, демонстрирующей сложный изгибной характер колебаний.

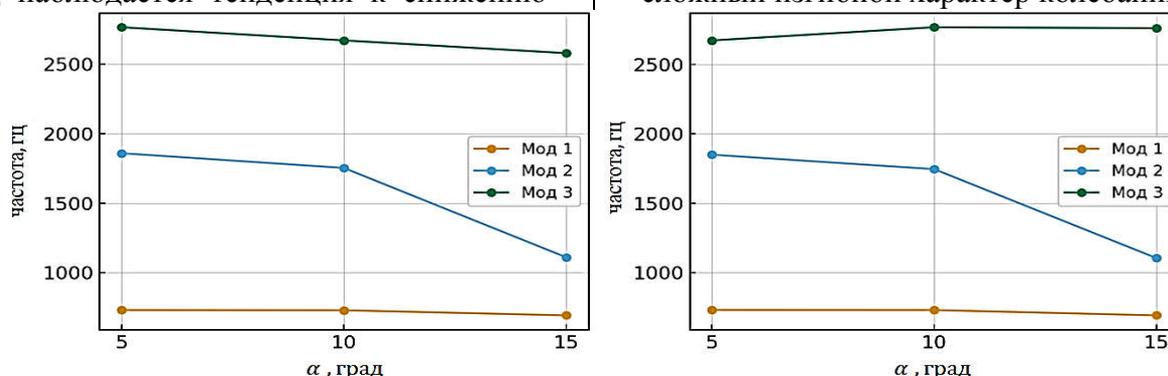


Рис. 6. Собственные частоты изгибных и крутильных колебаний ротора при разных углах конических подшипников скольжения ( $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ )

Fig. 6. Natural frequencies of bending and torsional vibrations of the rotor at different angles of tapered plain bearings ( $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ )

Полученные результаты подтверждают чувствительность динамических характеристик ротора к геометрии опор

### Заключение

В ходе работы выполнено численное исследование динамических характеристик роторной системы с коническо-цилиндрическими подшипниками скольжения (КЦПС). На основе расчётов гидродинамических параметров смазочного слоя получены матрицы динамических коэффициентов жёсткости и демпфирования, которые были интегрированы в модель ротора для проведения модального анализа. Установлено, что увеличение угла конуса  $\alpha$  приводит к снижению эквивалентной жёсткости опор и, как следствие, к уменьшению собственных частот изгибных и крутильных колебаний. Полученные модальные формы подтверждают наличие взаимосвязи между изгибными и крутильными деформация-

ми, что характерно для роторов с комбинированными опорами. Полученные собственные частоты при стационарном режиме ( $\Omega = 0$ ) являются основой для последующего построения диаграммы Кэмпбелла и определения критических скоростей вращения. В качестве дальнейшего развития работы планируется анализ зависимости собственных частот от скорости вращения с учетом гироскопических эффектов. Представленные результаты могут быть использованы при параметрическом синтезе КЦПС и выборе оптимальных конструктивных параметров, обеспечивающих требуемую виброустойчивость и надёжность высокоскоростных роторных систем.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Позняк Э.Л. Колебания роторов // Вибрации в технике: в 6 т. Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. М.: Машиностроение, 1980. С. 130-189.
2. Лунд Й.В. Разработка понятия динамических коэффициентов радиальных подшипников скольжения // Проблемы трения и смазки. 1987. № 1. С. 40-45.
3. Поддубный А.И. О расчете характеристик конических гидростатических подшипников // Исследование и проектирование гидростатических опор и уплотнений быстроходных машин: сб. науч. тр. Харьков: ХАИ, 1975. Вып. 2. С. 125-128.
4. Максимов В.А., Баткис Г.С. Трибология подшипников и уплотнений скольжения высокооборотных турбомашин. Казань: ФЭН, 1998. 428 с.
5. Рао Дж.С. Динамика роторов достигла зрелости // Шестая международная конференция по динамике роторов: материалы. – Сидней, Австралия: Университет Нового Южного Уэльса, 2002. Т. 1. С. 15-26.
6. Савин Л.А., Соломин О.В., Корнеев А.Ю. и др. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2000610593 «Подшипник-Криоген». 2000.
7. Корнеев А.Ю., Савин Л.А., Соломин О.В. Конические подшипники скольжения: монография. М.: Машиностроение-1, 2008. 172 с.
8. Соломин О.В., Корнеев А.Ю. Динамические характеристики конических опор скольжения // Вестник машиностроения. 2006. № 12. С. 31-37.
9. Корнеев А.Ю., Савин Л.А., Ярославцев М.М. Расчет статических характеристик конических многоклиновых гидродинамических опор скольжения // Вестник машиностроения. 2010. № 3. С. 25-29.
10. Корнеев А.Ю., Ярославцев М.М. Динамические характеристики конических многоклиновых гидродинамических опор скольжения // Russian Engineering Research. 2010. Т. 30, № 4. С. 401-406.
11. Иванов А.В., Леонтьев М.К. Модальный анализ динамической роторной системы // Известия вузов. Авиационная техника. 2005. № 3. С. 31-35.
12. Li S.B., Ao H.R., Jiang H.Y., Korneevev A.Yu., Savin L.A. Стабильность характеристик конических подшипников с водяной смазкой // Journal of Donghua University (English Edition). 2012. Vol. 29, No. 2. P. 115-122.
13. Нгуен Тхай Ха. Влияние структурных параметров на формирование полей гидродинамических давлений в радиально-упорных подшипниках жидкостного скольжения. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии/ № 5 (367) 2024. с. 44-51.
14. Марахин Н.А., Нгуен Тхай Ха, Лю Ифань, Казаков Ю.Н., Савин Л.А. Гибридные подшипники скольжения. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии/ № 6 (362) 2023. с. 35-42.

15. Савин Л.А., Корнеев А.Ю., Казаков Ю.Н./ Собственные частоты роторов с коническими подшипниками скольжения // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2022. № 2 (352). С. 153-159. – DOI 10.33979/2073-7408-2022-352-2-153-159.
16. Нгуен Тхай Ха, Савин Л.А., До Ван Минь, Нгуен Тиен Хиеп/ Интегральные характеристики коническо-цилиндрических подшипников скольжения // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2025. Вып. 8. С. 317-328. – DOI: 10.24412/2071-6168-2025-8-317-318.

17. Нгуен Т., Казаков Ю.Н., Шутин Д.В., Савин Л.А. Параметрический синтез коническо-цилиндрических подшипников скольжения // *Транспортное машиностроение*. 2025. №. 9. С. 11-21. DOI: <https://doi.org/10.30987/2782-5957-2025-9-11-21>.
18. Нгуен Тхай Ха, Казаков Ю.Н., Шутин Д.В., Савин Л.А./ Динамические характеристики коническо-цилиндрических подшипников скольжения // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2025. № 5 (373). С. 74–83. DOI: 10.33979/2073-7408-2025-373-5-74-83.

## REFERENCES

1. Poznyak EL. Vibrations of rotors. In: *Vibrations in engineering. Vibrations of machines, structures and their elements*. Moscow: Mashinostroenie; 1980.
2. Lund JV. Development of the concept of dynamic coefficients of radial sliding bearings. *Journal of lubrication technology. Transactions of the ASME*. 1987;1:40-45.
3. Poddubny AI. On calculating the characteristics of conical hydrostatic bearings. *Collection of Scientific Papers, 1975: Research and Design of Hydrostatic Supports and Seals of High-speed Machines*; Kharkov: KHAI; 1975;2:125-128.
4. Maksimov VA, Batkis GS. *Tribology of bearings and sliding seals of high-speed turbomachines*. Kazan: FEN; 1998.
5. Rao JS. Dynamics of rotors has reached maturity. *Proceedings of the Sixth International Conference on Dynamics of Rotors*. Sydney (Australia): University of New South Wales; 2002;1:15-26.
6. Savin LA, Solomin OV, Korneev AYU. Certificate of official registration of the computer program No. 2000610593. *Bearing Cryogen*. 2000.
7. Korneev AYU, Savin LA, Solomin OV. *Tapered sliding bearings: monograph*. Moscow: Mashinostroenie-1; 2008.
8. Solomin OV, Korneev AYU. Dynamic characteristics of conical sliding bearings. *Vestnik Mashinostroeniya*. 2006;12:31-37.
9. Korneev AYU, Savin LA, Yaroslavtsev MM. Calculation of static characteristics of conical multiple-wedge hydrodynamic liquid friction bearers. *Vestnik Mashinostroeniya*. 2010;3:25-29.
10. Korneev AYU, Yaroslavtsev MM. Dynamic characteristics of conical multiline hydrodynamic sliding bearings. *Russian Engineering Research*. 2010;30(4):401-406.
11. Ivanov AV, Leontiev MK. Modal analysis of a dynamic rotary system. *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika*. 2005;3:31-35.
12. Li SB, Ao HR, Jiang HY, Korneev AYU, Savin LA. Stability of characteristics of tapered bearings with water lubrication. *Journal of Donghua University*. 2012;29(2):115-122.
13. Nguyen ThH. Effect of structural parameters on the formation of hydrodynamic pressure field in cylindrical-conical fluid bearings. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*. 2024;5(367):44-51.
14. Marakhin NA, Nguyen ThH, Liu Yi, Kazakov YuN, Savin LA. Hybrid fluid film bearings. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*. 2023;6(362):116-125.
15. Savin LA, Korneev AYU, Kazakov YuN. Natural frequencies of rotors with conical bearings of liquid friction. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*. 2022;2(352):153-159. DOI 10.33979/2073-7408-2022-352-2-153-159.
16. Nguyen ThH, Savin LA, Do Van Minh, Nguyen TH. Integral characteristics of tapered-cylindrical fluid friction bearings. *Izvestiya Tula State University (Izvestiya TulGU). Technical Sciences*. 2025;8:317-328. DOI: 10.24412/2071-6168-2025-8-317-318.
17. Nguyen T, Kazakov YuN, Shutin DV, Savin LA. Parametric synthesis of conical-cylindrical plain bearings. *Transport Engineering*. 2025;9:11-21. DOI: <https://doi.org/10.30987/2782-5957-2025-9-11-21>
18. Nguyen ThH, Kazakov YuN, Shutin DV, Savin LA. Dynamic characteristics of conical-cylindrical plain bearings. *Fundamental and Applied Problems of Technics and Technology*. 2025;5(373):74-83. DOI: 10.33979/2073-7408-2025-373-5-74-83.

## Информация об авторах:

**Нгуен Тхай Ха** – аспирант Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, тел. 8(991) 973 20 19.

**Лю Ифань** – аспирант Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, тел. 8(953) 626 72 14

**Казakov Юрий Николаевич** – аспирант Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, тел. 8(920) 089 47 19.

**Настепанин Кирилл Константинович** – аспирант Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, тел. 8(953) 413 69 23.

**Nguyen Thai Ha** – Postgraduate student of Orel State University named after I.S. Turgenev, phone: 8(991) 973 20 19.

**Liu Yifan** – Postgraduate student of Orel State University named after I.S. Turgenev, phone: 8(953) 626 72 14.

**Kazakov Yury Nikolaevich** – Postgraduate student of Orel State University named after I.S. Turgenev, phone: 8(920) 089 47 19.

**Савин Леонид Алексеевич** – доктор технических наук, профессор Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, тел. 8(976) 548 46 61.

**Nastepanin Kirill Konstantinovich** – Postgraduate student of Orel State University named after I.S. Turgenev, phone: 8(953) 413 69 23.

**Savin Leonid Alekseevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor of Orel State University named after I.S. Turgenev, phone: 8(976) 548 46 61.

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.**  
**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**  
**The authors declare no conflicts of interests.**

**Статья опубликована в режиме Open Access.**  
**Article published in Open Access mode.**

**Статья поступила в редакцию 10.11.2025; одобрена после рецензирования 28.11.2025; принята к публикации 29.11.2025. Рецензент – Анцев В.Ю., доктор технических наук, профессор Тульского государственного университета, член редсовета журнала «Транспортное машиностроение».**

**The article was submitted to the editorial office on 10.11.2025; approved after review on 28.11.2025; accepted for publication on 29.12.2025. The reviewer is Antsev V.Yu., Doctor of Technical Sciences, Professor of Tula State University, member of the Editorial Council of the journal *Transport Engineering*.**