Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2024. № 3 (25). С. 53-64.
ISSN 2658-3488 print, ISSN 2658-6436 online
Automation and modeling in design and management. 2024. № 3 (25). P. 53-64.

Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 519.86
doi: 10.30987/2658-6436-2024-3-53-64

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ КОРПОРАТИВНЫХ ОБЛИГАЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ И СЛУЧАЙНЫХ СОСТОЯНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Оливер Джидзем Фока[1✉], Олег Николаевич Дмитроченко[2]
[1, 2] Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Россия
[1] foka.russia.maths1@mail.ru
[2] dmitroleg@rambler.ru

Аннотация. *В задаче оптимального стохастического управления мы оцениваем, с помощью метода безразличия полезности, цену облигации и премию своп-контракта по дефолту (КДС), когда параметры модели (рыночная процентная ставка, коэффициент дрейфа и волатильность рискованных базовых активов) являются случайными функциями времени и состояния. А именно, процентная ставка безрискового актива зависит от времени, цены рискованных активов описываются линейными однородными стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) с мультипликативным шумом. Для этого мы рассматриваем портфель с безрисковым активом и рискованным активом без риска дефолта. Мы определяем для каждого такого портфеля количество рискованных активов, максимизирующее ожидаемую полезность его конечного богатства. Это количество позволяет нам решить параболические дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ), путем преобразования их в обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью метода разделения переменных, чтобы получить функцию мгновенной стоимости каждого портфеля. Мы выводим цену облигации и ставку премии своп-контракта по дефолту (КДС), которые являются суммами, обеспечивающими тот же уровень ожидаемой полезности, инвестируя все свое богатство в портфель, не содержащий этих кредитных инструментов, или инвестируя эти суммы в кредитные инструменты и оставшуюся часть своего богатства в портфель.*

Ключевые слова: стохастический процесс, оптимальное управление, динамическое программирование

Для цитирования: Фока О.Д., Дмитроченко О.Н. Задача оптимального стохастического управления и оценки стоимости корпоративных облигаций, зависящих от времени и случайных состояний параметров // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2024. №3 (25). С. 53-64. doi: 10.30987/2658-6436-2024-3-53-64.

Original article
Open Access Article

THE PROBLEM OF OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL AND CORPORATE BOND VALUATION, DEPENDING ON TIME AND RANDOM STATES OF PARAMETERS

Oliver D. Foka[1✉], Oleg N. Dmitrochenko[2]
[1, 2] Bryansk State Technical University, Bryansk, Russia
[1] foka.russia.maths1@mail.ru
[2] dmitroleg@rambler.ru

Abstract. *In the optimal stochastic control problem, one estimates, using the utility indifference method, the bond price and the premium of a default swap contract (Credit default swap) when the model parameters (market interest rate, drift coefficient, and volatility of risky underlying assets) are random functions of time and state. Namely, the interest rate of the risk-free asset depends on time, and the prices of risky assets are described by linear homogeneous stochastic differential equations (SDEs) with multiplicative noise. To do this, the authors consider a portfolio with a risk-free asset and a risky asset with no default risk. For each such portfolio, the authors determine the amount of risky assets that maximizes the expected utility of its final wealth. This quantity allows one to solve the parabolic partial differential equations arising from the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation by transforming them into ordinary differential equations using the method of variable separation to obtain the instantaneous value function of each portfolio. The authors derive the bond price and the default swap-contract premium (CDS) rate, which are the amounts that provide the same level of the expected utility by investing all of one's wealth in a portfolio that does not contain these credit instruments, or by investing these amounts in credit instruments and the remainder of one's wealth in the portfolio.*

Keywords: stochastic process, optimal control, dynamic programming
For citation: Foka O.D., Dmitrochenko O.N. The Problem of Optimal Stochastic Control and Corporate Bond Valuation, Depending on Time and Random States of Parameters. Automation and modeling in design and management, 2024, no. 3 (25). pp. 53-64. doi: 10.30987/2658-6436-2024-3-53-64.

Введение

Торговля осуществляется между банковским счетом и акционным счетом, при этом цена акций моделируется как процесс диффузии. Основное предположение состоит в том, что коэффициенты последнего зависят от времени и стохастического состояния процесса. В классической модели динамического выбора портфеля Р. Мертона предполагается, что доходности и волатильности рисковых активов являются константами или детерминистическими функциями. Однако многие явления, такие как смайлы волатильности и другие, не могут быть объяснены в рамках моделей с постоянной волатильностью. В литературе существует много работ, которые анализируют стохастическую волатильность в различных финансовых моделях.

Например, В. Хендерсон и Д. Хобсон [5] изучают цены опционов в рамках различных мартингальных мер. Важным классом моделей является класс моделей, связанных с максимизацией полезности. В таких моделях цель состоит в максимизации полезности богатства (накопительного или терминального). Много статей было посвящено изучению этой проблемы в стохастической среде. С целью нахождения оптимального портфеля путем максимизации ожидаемых функций полезности для терминального богатства в стохастической волатильной среде, Т. Зарифопулу [2] представляет упрощенные решения и выражает функцию стоимости через решение линейного параболического уравнения.

Благодаря работе Р. Мертона [3] в 1969 году по проблемам инвестирования, связанным с проблемами С. Ходжеса [6] в 1989 году, относящимися к двум сценариям этих проблем, Ж. Сиглох [4] в 2009 году в своей диссертации оценил безразличную цену облигации и безразличную премию КДС, предполагая, что параметры модели (процентная ставка, коэффициент сноса и волатильность) являются постоянными. Мы используем коэффициенты, которые зависят от времени и стохастического состояния процесса для оценки безразличной цены облигации и безразличной премии КДС с целью обобщения работ Ж. Сиглоха.

Материалы, модели, эксперименты и методы

I. *Постановка модели.* Рассмотрим инвестора, который в момент времени t имеет самофинансируемый портфель с ${Q_t}^0$ безрисковыми активами стоимостью M_t, подверженными процентной ставке r_t, и ${Q_t}^1, {Q_t}^2, \dots, {Q_t}^n$ бездефолтными рисковыми активами со стоимостями $A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^n$ соответственно. Динамика этих активов описывается следующим образом:

$$\forall t \in [0, T], dM_t = r_t M_t dt \text{ (динамика безрисковых активов);}$$

$$\forall t \in [0, T], \forall i \in \{1, \dots, n\}, d{A^i}_t = {A^i}_t\left(\mu_t^i dt + \sigma_t^i d{B_t}^i\right) \text{ (динамика рисковых активов),}$$

где μ_t^i и σ_t^i – коэффициенты сноса и диффузии соответственно.

Заметим, что $d{B_t}^i d{B_t}^j = \rho_{ij} dt$, где ρ_{ij} – коэффициент корреляции между ${B_t}^i$ и ${B_t}^j$. В дальнейшем будем считать ${B_t}^i$ и ${B_t}^j$ сильно коррелированными и полагать $\rho_{ij} = 1$.

В любой момент времени t разумно предположить, что инвестор имеет полную информацию о ценах рисковых активов $A_s^1, \dots, A_s^n$ для $0 \le s \le t$. Мы моделируем информационное состояние инвестора с помощью фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, где $\mathcal{F}_t = \sigma(\{{B_s}^1, \dots, {B_s}^n : 0 \le s \le t\} \cup \mathcal{N})$ где $\mathcal{N}$ – множество подмножеств Ω нулевой меры, фильтрация $(\mathcal{F}_t)$ удовлетворяет обычным условиям: она правосторонне непрерывна и увеличивается. $\mathcal{F}_0$ содержит все множества нулевой меры, а $\mathcal{F}_T$ представляет собой всю доступную информацию на $[0, T]$.

В момент времени t богатство инвестора в безрисковом активе равно $\pi_0 = \pi_0(t) = {Q_t}^0 M_t$, в i-м рисковом активе равно $\pi_i = \pi_i(t) = Q_t^i {A^i}_t$, а общее богатство Λ_t инвестора составляет:

$$\Lambda_t = \pi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t). \quad (1)$$

Динамика процесса богатства задается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\mathrm{d}\Lambda_t = [r_t\Lambda_t + \pi(t)^T(\mu_t - \boldsymbol{r_t})]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\ \sigma_t^i dB_t^i. \quad (2)$$

Доказательство. Поскольку портфель является самофинансируемым, дифференциал благосостояния Λ_t, определенный в (2), дает:

$$\mathrm{d}\Lambda_t = Q_t^0 dM_t + \sum_{i=1}^{n} Q_t^i dA_t^i = Q_t^0 r_t M_t dt + \sum_{i=1}^{n} Q_t^i A_t^i[\mu_t^i dt + \sigma_t^i dB_t^i] =$$

$$= \pi_0(t) r_t dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\mu_t^i dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_t^i dB_t^i,$$

поскольку $\pi_0(t) = \Lambda_t - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)$, тогда:

$$\mathrm{d}\Lambda_t = (\Lambda_t - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)) r_t dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\mu_t^i\, dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_t^i dB_t^i =$$

$$= r_t\Lambda_t dt - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) r_t dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\mu_t^i dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_t^i dB_t^i.$$

Тогда, мы получаем:

$$\mathrm{d}\Lambda_t = [r_t\Lambda_t + \pi(t)^T(\mu_t - \boldsymbol{r_t})]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_t^i dB_t^i.$$

Мы примем следующие обозначения: $\boldsymbol{r_t} = (r_t, \dots, r_t)^T \in R^n$ – вектор процентной ставки, $\pi = \pi(t) = \left(\pi_1(t), \dots, \pi_n(t)\right)^T \in R^n$ – вектор богатства портфель рискованных активов инвестор, $\Sigma_{\boldsymbol{t}} = \left(\sigma_t^i \sigma_t^j\right)_{1 \le i,j \le n}$ – (симметричная и невырожденная) ковариационная матрица рискованных активов, $\mu_t = (\mu_t^1, \dots, \mu_t^n)^T \in R^n$ – вектор коэффициента дрейфа рискованных активов, $\mathcal{A}_s$ – набор подходящих стратегий портфеля без дефолтов.

Определение. Процесс $\pi(t) = \left(\pi_1(t), \dots, \pi_n(t)\right)^T$, $\mathcal{F}_t$ – адаптированный – допустимая стратегия портфеля, если $E\left(\int_0^T \pi^2(t)dt\right) < +\infty$.

Замечание. Функция ценности оптимизационной задачи задается:

$$\Psi(t, \lambda) = \sup_{\pi \in R^n} E[u(\Lambda_T) | \Lambda_t = \lambda] \quad (3)$$

и удовлетворяет уравнению в частных дифференциалах (известному как уравнение в частных дифференциалах ГЯБ):

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, \lambda) + \sup_{\pi \in R^n} \mathcal{G}^{\pi}\, \Psi(t, \lambda) = 0; \\ \quad \Psi(T, \lambda) = u(\lambda), \quad \lambda \in R, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathcal{G}^{\pi}\Psi(t, \lambda) = r_t\lambda \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(t, \lambda) + \frac{1}{2}\pi(t)^T \Sigma_{\boldsymbol{t}} \pi(t) \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2}(t, \lambda) + \pi(t)^T(\mu_t - \boldsymbol{r_t}) \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(t, \lambda)$ – бесконечно малый генератор; Λ_T – конечное богатство; u – функция полезности *CARA* (Constant Absolute Risk Aversion), которая является вогнутой и неубывающей:

$$u(x) = -e^{-\gamma x},\ \gamma > 0 \quad (5)$$

где γ – коэффициент склонности к риску.

Представление функции стоимости в разделяемой форме $\Psi(t,\lambda) = u(\lambda)g(t)$ позволяет выделить функцию g, которая обычно неизвестна и удовлетворяет уравнению обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), с $g: [0,T] \to R_+^\star$ – производная функция на $[0,T]$ и проверяющая $g(T) = 1$.

Теорема 1.

а) решение уравнения в частных производных (4) задается выражением:

$$\Psi(t,\lambda) = -e^{-\gamma\lambda + \int_t^T \beta_s ds} \tag{6}$$

где $\beta_t = r_t\lambda - \frac{1}{2}(\mu_t - \boldsymbol{r_t})^T \Sigma_{\boldsymbol{t}}^{-\boldsymbol{1}}(\mu_t - \boldsymbol{r_t})$.

б) оптимальный портфель в частных производных (4) задается выражением:

$$\pi^\star(t) = -\frac{1}{\gamma}\Sigma_{\boldsymbol{t}}^{-\boldsymbol{1}}(\mu_t - \boldsymbol{r_t}). \tag{7}$$

Доказательство. Критическая точка $\mathcal{G}^\pi\Psi$ через условие оптимальности первого порядка задается:

$$\pi^\star(t) = -\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(t,\lambda)}{\frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2}(t,\lambda)}\Sigma_t^{-\boldsymbol{1}}(\mu_t - \boldsymbol{r_t}) = -\frac{1}{\gamma}\Sigma_t^{-\boldsymbol{1}}(\mu_t - \boldsymbol{r_t}).$$

Подставляя $\pi^\star(t)$ в уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (4), получаем:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\lambda) + r_t\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(t,\lambda) - \frac{1}{2}(\mu_t - \boldsymbol{r_t})^T\Sigma_t^{-\boldsymbol{1}}(\mu_t - \boldsymbol{r_t})\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}(t)\right)^2}{\frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2}(t)} = 0.$$

Поскольку $\Psi(t,\lambda) = -e^{-\gamma\lambda}g(t)$, то g удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$-e^{-\gamma\lambda}\left[g'(t) + \left(r_t\lambda - \frac{1}{2}(\mu_t - \boldsymbol{r_t})^T\Sigma_t^{-\boldsymbol{1}}(\mu t - \boldsymbol{r_t})\right)g(t)\right] = 0.$$

Заменяя β_t его значением, получаем:

$$g'(t) + \beta_t g(t) = 0$$

Используя условие $g(T) = 1$, имеем: $g(t) = e^{\int_t^T \beta_s ds}$. Кроме того, поскольку $\Psi(t,\lambda) = -e^{-\gamma\lambda}g(t)$, отсюда и следует результат.

Замечание. Функция значения Ψ является вогнутой и неубывающей по отношению к переменной богатства λ благодаря ее тесной зависимости от функции полезности u.

II. *Цены кредитных инструментов в безрисковом портфеле.* В течение периода инвестирования агент может инвестировать часть своего богатства в корпоративные облигации C_t или кредитный дефолтный своп (КДС), а остальное – в портфель, состоящий из безрисковых активов стоимостью M_t и рискового актива стоимостью I_t с динамикой:

$$\forall t \geq 0, \mathrm{d}I_t = I_t[\mu_t^1 dt + \sigma_t^1 dB_t^1],$$

где B_t^1 – стандартное броуновское движение.

Целью этого раздела является определение цены каждого из этих двух кредитных инструментов методом оценки на основе безразличия полезности. Отметим, что модель оценки дефолта субъекта отсылки – это модель в сокращенной форме который моделируется пуассоновским процессом $(N_t)_{t\geq 0}$ с $N_0 = 0$ и постоянной интенсивностью κ, а время наступления дефолта обозначается τ_d и определяется как:

$$\tau_d = inf\,\{t \geq 0|N\_\{t\} = 1\,\}.$$

Построим этот раздел, оценивая методом равнодушия полезности цену корпоративной облигации C_t для портфеля с безрисковыми активами и рисковыми активами без дефолта. Допустим, что эта цена обеспечивает инвестору тот же уровень ожидаемой полезности, что и вложение остатка его состояния $\lambda - C_t$ в безрисковые активы M_t и рисковые активы I_t, или вложение всего своего состояния λ в эти же активы. Покупая корпоративную облигацию, инвестор получает номинальную сумму F в случае, если обслуживаемое лицо не дефолтирует до срока погашения T, или получает процент R (предполагается, что является случайной величиной, независимой на интервале $(0{,}1)$ движения Броуновского B_t) от номинальной суммы в случае дефолта до срока погашения.

Поскольку для будущих денежных потоков эквивалентность уверенности [4, 8] является суммой, которую мы были бы готовы получить без риска относительно ожидаемых будущих денежных потоков, чистая приведенная стоимость инвестиции может быть определена, как сумма эквивалентов определенных денежных потоков, дисконтированных по безрисковой ставке. Уверенность эквивалента R удовлетворяет уравнению: $E\left[u\left(RFe^{\int_t^T r_s ds}\right)\right] = u\left(\widetilde{R_t}Fe^{\int_t^T r_s ds}\right)$ в [4] и определяется следующим образом:

$$\widetilde{R_t} = -\frac{1}{\gamma Fe^{\int_t^T r_s ds}} \ln E\left[e^{-\gamma RFe^{\int_t^T r_s ds}}\right].$$

Динамика благосостояния инвестора с условным требованием определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\overline{\Lambda}_s = \left[r_s\overline{\Lambda}_s + \overline{\pi}_1(s)(\mu_s^1 - r_s)\right]\mathrm{d}s + \overline{\pi}_1(s)\sigma_s^1 dB_s \\ \overline{\Lambda}_\tau = \overline{\Lambda}_{\tau^-} + RF.\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} + F.\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \end{cases}, \tag{8}$$

где $\tau = \min(\tau_d, T)$ и ограничение богатства означает, что если дефолт ссылочного лица происходит до погашения $(\tau \leq T)$, то инвестор получает случайный процент R от номинала, а в противном случае $(\tau > T)$ он получает весь номинал.

Любая допустимая стратегия характеризуется $\overline{\pi}_1(t)$, которая представляет собой сумму денег, инвестированных в I_t в момент времени t. Для удобства в дальнейшем мы будем писать $\overline{\pi}(t)$ вместо $\overline{\pi}_1(t)$.

Функция стоимости инвестора для портфеля с условной требовательностью определяется как:

$$\overline{\Psi}(t,\lambda) = \sup_{\overline{\pi}\in R} E\left[u(\overline{\Lambda}_T)\middle|\overline{\Lambda}_t = \lambda, t < \tau_d\right]. \tag{9}$$

Следующее предложение устанавливает УЧП, проверяемое $\overline{\Psi}$.

Предложение 1. Функция удовлетворяет:

$$\begin{cases} \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}(t,\lambda) + \sup_{\overline{\pi}\in R} \mathcal{G}^{\overline{\pi}}\overline{\Psi}(t,\lambda) = 0 \\ \overline{\Psi}(T,\lambda) = u(\lambda + F), \quad \lambda \in R \end{cases} \tag{10}$$

где $\mathcal{G}^{\overline{\pi}}\overline{\Psi}(t,\lambda) = r_t\lambda\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}(t,\lambda) + \frac{1}{2}(\sigma_t^1)^2\overline{\pi}^2(t)\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\lambda^2}(t,\lambda) + (\mu_t^1 - r_t)\overline{\pi}(t)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}(t,\lambda) + \kappa\left[\Psi\left(t,\lambda + \widetilde{R_t}F, z\right) - \overline{\Psi}(t,\lambda,z)\right]$, где $\overline{\Psi}$ – функция ценности, соответствующая инвестированию в портфель с безрисковым активом M_t и рисковым активом I_t.

В доказательстве этого результата пишем $\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}}$ вместо $\overline{\Lambda}_t$, чтобы подчеркнуть зависимость богатства инвестора от стратегии $\overline{\pi}$.

Доказательство. $\overline{\Psi}(t,\overline{\Lambda}_t)$ является преобразованием процесса $\left(\overline{\Lambda}_t\right)_{t\in[0,T]}$, $\overline{\pi}^{\star}$ – оптимальное управление в (9), $\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}$ – состояние системы, являющееся решением (8), начинающимся с λ в момент t при управлении $\overline{\pi}^{\star}$. Поскольку дефолт на референсном объекте (облигации) вызывается пуассоновским процессом $(N_t)_{t\geq 0}$, то, применяя формулу Ито между t и $t+h$, получаем:

$$\overline{\Psi}\left(t+h,\overline{\Lambda}_{t+h}^{\overline{\pi}^{\star}}\right)=\overline{\Psi}\left(t,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+\left[r_s\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}+(\mu_s^1-r_s)\overline{\pi}^{\star}(s)\right]\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right)\mathrm{d}s+$$
$$+\int_t^{t+h}\frac{1}{2}(\sigma_s^1)^2\left(\overline{\pi}^{\star}(s)\right)^2\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\lambda^2}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}\sigma_s^1\overline{\pi}^{\star}(s)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\mathrm{d}B_s^1+\int_t^{t+h}\left[\Psi\big(s,\Lambda_s^{\overline{\pi}^{\star}}+\right.$$
$$\left.+\widetilde{R}_sF\big)-\overline{\Psi}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right]dN_s.$$

Действительно, когда в момент погашения облигации происходит дефолт, инвестор получает процент $\widetilde{R_t}$ от номинала, составляющий $\widetilde{R_t}F$, и следовательно, новый процесс богатства равен $\lambda+\widetilde{R_t}F$; в то время как, если дефолта по облигации не происходит, $\widetilde{R_t}=R=1$, и следовательно, новый процесс богатства равен $\lambda+F$.

Используя условное математическое ожидание, мы имеем:

$$E\left[\overline{\Psi}\left(t+h,\overline{\Lambda}_{t+h}^{\overline{\pi}^{\star}}\right)|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]=\overline{\Psi}\left(t,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+r_s\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right)ds\,\middle|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]+$$
$$+E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{1}{2}(\sigma_s^1)^2\left(\overline{\pi}^{\star}(s)\right)^2\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\lambda^2}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+(\mu_s^1-r_s)\overline{\pi}^{\star}(s)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right)ds\,\middle|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]+$$
$$+E\left[\int_t^{t+h}\left[\Psi\big(s,\Lambda_s^{\overline{\pi}^{\star}}+\widetilde{R}_sF\big)-\overline{\Psi}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right]dN_s\,\middle|\,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right].$$

При этом:

$$E\left[\int_t^{t+h}\sigma_s^1\,\overline{\pi}^{\star}(s)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}}\right)\mathrm{d}B_s^1\middle|\,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]=0.$$

Кроме того,

$$\overline{\Psi}\left(t,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}}\right)=E\left[\overline{\Psi}\left(t+h,\overline{\Lambda}_{t+h}^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\middle|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right],$$

Так:

$$E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)+r_s\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}(s,\lambda)\right)ds\,\middle|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]+$$
$$+E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{1}{2}(\sigma_s^1)^2\left(\overline{\pi}^{\star}(s)\right)^2\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\lambda^2}(s,\lambda)+(\mu_s^1-r_s)\overline{\pi}^{\star}(s)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\lambda}(s,\lambda)\right)ds\,\middle|\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]+$$
$$+E\left[\int_t^{t+h}\left[\Psi\big(s,\Lambda_s^{\overline{\pi}^{\star}}+\widetilde{R}_sF\big)-\overline{\Psi}\left(s,\overline{\Lambda}_s^{\overline{\pi}^{\star}}\right)\right]dN_s\,\middle|\,\overline{\Lambda}_t^{\overline{\pi}^{\star}}=\lambda\right]=0.$$

И поскольку $\sup_{\overline{\pi}\in R} \mathcal{G}^{\overline{\pi}}\overline{\Psi}(t,\lambda) = \mathcal{G}^{\overline{\pi}^\star}\overline{\Psi}(t,\lambda)$, то, разделив на h и переходя к пределу при h к 0, мы получаем искомый результат.

Завершим этот раздел, оценив с использованием метода индифферентности полезности цену корпоративной облигации для портфеля с безрисковым рискованным активом. Для этого напомним определение этой цены в соответствии с этим методом, которое утверждает, что это цена, обеспечивающая инвестору тот же ожидаемый уровень полезности, когда он инвестирует оставшуюся часть своего богатства $\lambda - C_t$ в безрисковый актив M_t и рискованный актив I_t, или когда он инвестирует все свое богатство λ в безрисковый актив M_t и рискованный актив I_t.

Определение. Цена безразличия C_t облигации является решением уравнения $\overline{\Psi}(t,\lambda - C_t) = \Psi(t,\lambda)$, для $n = 1$.

Чтобы определить $\Psi = \overline{\Psi}$, мы предполагаем, что функция стоимости $\overline{\Psi}$ записывается в виде $\forall t \in [0,T], \overline{\Psi}(t,\lambda) = -e^{-\gamma\lambda}\overline{h}(t)$, где $\overline{h}: [0,T] \to R_+^\star$ является функцией такой, что $\overline{h}(T) = e^{-\gamma F}$.

Первый основной результат этой работы оценивает цену облигации.

Теорема 2.

Цена безразличия C_t облигации определяется уравнением:

$$C_t = \frac{1}{\gamma} ln\left(\frac{g(t)}{\overline{h}(t)}\right), \tag{11}$$

где

$$g(t) = e^{\int_t^T \beta_s ds}; \tag{12}$$

$$\overline{h}(t) = e^{-\gamma F} e^{-\int_t^T \alpha_s ds} - e^{-\int_t^T \alpha_s ds} \int_t^T \kappa e^{-\widetilde{R_s}F} e^{\int_s^T (\alpha_u + \beta_u)du} ds; \tag{13}$$

$$\beta_t = r_t\lambda - \frac{1}{2}(\mu_t - r_t)^T \Sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t); \tag{14}$$

$$\alpha_t = \frac{(\gamma-2)(\mu_t^1 - r_t)}{2(\sigma_t^1)^2} - (\lambda\gamma r_t + \kappa). \tag{15}$$

Доказательство. Заменив $\overline{\Psi}$ его выражением в уравнении (10), получаем:

$$\begin{cases} \overline{h'}(t) - (\gamma\lambda r_t + \kappa)\overline{h}(t) + \inf_{\overline{\pi}_1(t)\in R} -\left((\mu_t^1 - r_t)\gamma\overline{\pi}_1(t) - \frac{1}{2}(\sigma_t^1)^2\overline{\pi}_1^2(t)\gamma^2\right)\overline{h}(t) = -\kappa e^{-\gamma\widetilde{R_t}F} g(t) \\ \overline{h}(T) = e^{-\gamma F} \end{cases}. \tag{16}$$

По условию оптимальности первого порядка минимум достигается при:

$$\overline{\pi}_1^\star(t) = \frac{(\mu_t^1 - r_t)}{\gamma(\sigma_t^1)^2}.$$

И из уравнения (16) теперь можем получить:

$$\inf_{\overline{\pi}_1(t)\in R} -\left((\mu_t^1 - r_t)\gamma\overline{\pi}_1(t) - \frac{1}{2}(\sigma_t^1)^2\overline{\pi}_1^2(t)\gamma^2\right)\overline{h}(t) = \frac{(2-\gamma)(\mu_t^1 - r_t)}{2(\sigma_t^1)^2}\overline{h}(t).$$

Тогда получается следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \overline{h'}(t) + \left[\frac{(\gamma-2)(\mu_t^1 - r_t)}{2(\sigma_t^1)^2} - (\lambda\gamma r_t + \kappa)\right]\overline{h}(t) = -\kappa e^{-\gamma\widetilde{R_t}F} g(t) \\ \overline{h}(T) = e^{-\gamma F} \end{cases}.$$

Итак, зададим:

$$\alpha_t = \frac{(\gamma-2)(\mu_t^1 - r_t)}{2(\sigma_t^1)^2} - (\lambda\gamma r_t + \kappa).$$

Что приводит к: $\overline{h'}(t) + \alpha_t \overline{h}(t) = -\kappa e^{-\gamma\widetilde{R_t}F} g(t)$. Чья резолюция дает $e^{-\gamma F} e^{-\int_t^T \alpha_s ds}$. Цена безразличия p облигации определяется уравнением:

$$\overline{\Psi}(t, \lambda - C_t) = \Psi(t, \lambda).$$

Имеем:

$$\overline{\Psi}(t, \lambda - C_t) = \Psi(t,\lambda) \Rightarrow -e^{-\gamma(\lambda - C_t)}\overline{h}(t) = -e^{-\gamma\lambda} g(t), \quad \text{т.е.}$$

$$-e^{-\gamma(\lambda - C_t)}\overline{h}(t) = -e^{-\gamma\lambda} g(t) \Rightarrow \gamma C_t = ln\left(\frac{g(t)}{\overline{h}(t)}\right).$$

Следовательно,

$$C_t = \frac{1}{\gamma} ln\left(\frac{g(t)}{\overline{h}(t)}\right).$$

В следующем разделе можем оценить непрерывную стоимость премии по КДС, которую инвестор платит продавцу защиты.

Предположим, что инвестор продает (или покупает) кредитный дефолтный своп (КДС) и получает (или платит) непрерывную премиальную ставку $S(t)$, выплачиваемую на номинальную сумму F с момента заключения контракта до наступления срока погашения или до момента дефолта ссылочного субъекта, в зависимости от того, что произойдет раньше. Если дефолт наступает до погашения, инвестор совершает (или получает) случайный платеж $(1-R)F$ (где $0 \le R \le 1$), и все будущие премиальные платежи прекращаются.

Аналогично (2) и (8), динамика богатства инвестора имеет вид:

$$d\widetilde{\Lambda}_t = \begin{cases} \left[r_t\widetilde{\Lambda}_t + \epsilon S(t)F + (\mu_t^1 - r_t)\widetilde{\pi}_1(t)\right]dt + \widetilde{\pi}_1(t)\sigma_t^1 dB_t^1, 0 < t < \tau, \\ \left[r_t\widetilde{\Lambda}_t + (\mu_t^1 - r_t)\widetilde{\pi}_1(t)\right]dt + \widetilde{\pi}_1(t)\sigma_t^1 dB_t^1, t > \tau, \end{cases} \tag{17}$$

где предельное богатство: $\widetilde{\Lambda}_\tau = \widetilde{\Lambda}_{\tau^-} - (1-R)F \cdot I_{\{\tau_d \le T\}}$. Здесь $\epsilon = +1$ для продавца КДС и $\epsilon = -1$ для покупателя.

Аналогично (9) и (10), функция стоимости $\widetilde{\Psi}(t,\lambda)$, соответствующая инвестициям в КДС, определяется как:

$$\widetilde{\Psi}(t,\lambda) = \sup_{\widetilde{\pi}\in R} E\left[u\left(\widetilde{\Lambda}_T\right)\middle|\widetilde{\Lambda}_{t_t} = \lambda, t < \tau_d\right]. \tag{18}$$

Следующее предложение устанавливает УЧП, проверяемое $\widetilde{\Psi}$.

Предложение 2. Функция $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяет:

$$\begin{cases} \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial t}(t,\lambda) + \sup_{\widetilde{\pi}\in R} \mathcal{G}_\epsilon^{\widetilde{\pi}}\widetilde{\Psi}(t,\lambda) = 0 \\ \widetilde{\Psi}(T,\lambda) = u(\lambda), \quad \lambda \in R \end{cases}, \tag{19}$$

где $\mathcal{G}_\epsilon^{\widetilde{\pi}}\widetilde{\Psi}(t,\lambda) = r_t\lambda\frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial\lambda}(t,\lambda) + \frac{1}{2}(\sigma_t^1)^2\widetilde{\pi}^2(t)\frac{\partial^2\widetilde{\Psi}}{\partial\lambda^2}(t,\lambda) + [(\mu_t^1 - r_t + \epsilon S(t)F)]\widetilde{\pi}(t)\frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial\lambda}(t,\lambda) + $ $+ \kappa\left[\Psi\left(t, \lambda - \epsilon\left(1 - \widetilde{R_t}\right)F, z\right) - \widetilde{\Psi}(t,\lambda,z)\right]$.

Доказательство. Действуем аналогично, как в предложении 2. Достаточно заменить $\lambda + \widetilde{R_t}F$ на $\lambda - \epsilon\left(1-\widetilde{R_t}\right)F$ и $\overline{\Psi}$ на $\widetilde{\Psi}$, и мы получаем результат.

Предположим, что функция стоимости $\widetilde{\Psi}$ записывается в виде:

$$\forall t \in [0,T], \widetilde{\Psi}(t,\lambda) = -e^{-\gamma\lambda}\tilde{h}(t),$$

где $\tilde{h}: [0,T] \to R_+^{\star}$ – функция, удовлетворяющая условию $\tilde{h}(T) = 1$.

Второй основной результат этой работы дает формулу для расчета ставки кредитного дефолтного свопа.

Теорема 3.

Ставка премии безразличия $S(t)$ кредитного дефолтного свопа является решением уравнения: $\widetilde{\Psi}(t,\lambda) = \Psi(t,\lambda)$ и это эквивалентно следующему уравнению: $\tilde{h}(t) = g(t)$, где:

$$g(t) = e^{\int_t^T \beta_s ds}; \quad (20)$$

$$\tilde{h}(t) = e^{-\gamma F} e^{-\int_t^T \alpha_s ds} - e^{-\int_t^T \alpha_s ds} \int_t^T \kappa e^{\epsilon(1-\widetilde{R_s})F} e^{\int_s^T (\alpha_u + \beta_u) du} ds; \quad (21)$$

$$\beta_t = r_t \lambda - \frac{1}{2}(\mu_t - r_t)^T \Sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t); \quad (22)$$

$$\alpha_t = \frac{(\gamma-2)\left(\mu_t^1 - r_t + \epsilon S(t) F\right)}{2\left(\sigma_t^1\right)^2} - (\lambda\gamma r_t + \kappa). \quad (23)$$

Доказательство. Оно основано по аналогии с теоремой 2. Достаточно заменить $\lambda + \widetilde{R_t}F$ на $\lambda - \epsilon\left(1 - \widetilde{R_t}\right)F$, и результат получается автоматически.

Результаты

Ниже представлены траектории рискового актива с зависящими от времени и состояния дрейфом и волатильностью случайной функции оптимального управления.

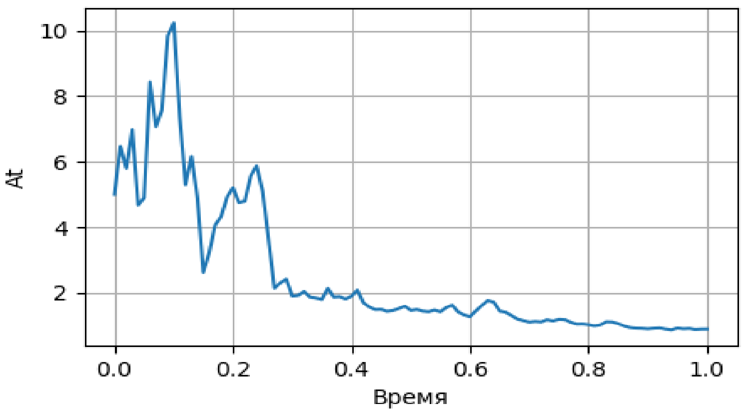

Рис. 1. Траектории рискового актива для $\mu(t, A_t) = \mu A_t$; $\sigma(t, A_t) = \sigma A_t$

Fig. 1. Trajectory of risky asset for **$\mu(t, A_t) = \mu A_t$; $\sigma(t, A_t) = \sigma A_t$**

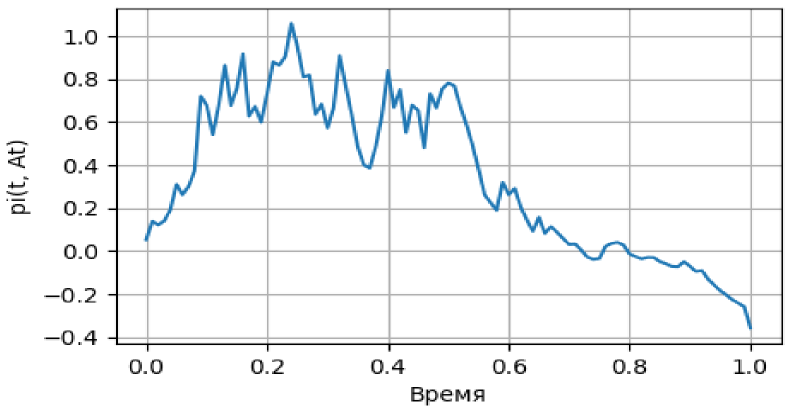

Рис. 2. Функции оптимального управления для $\mu(t, A_t) = \mu A_t$; $\sigma(t, A_t) = \sigma A_t$

Fig. 2. Optimal control function for **$\mu(t, A_t) = \mu A_t$; $\sigma(t, A_t) = \sigma A_t$**

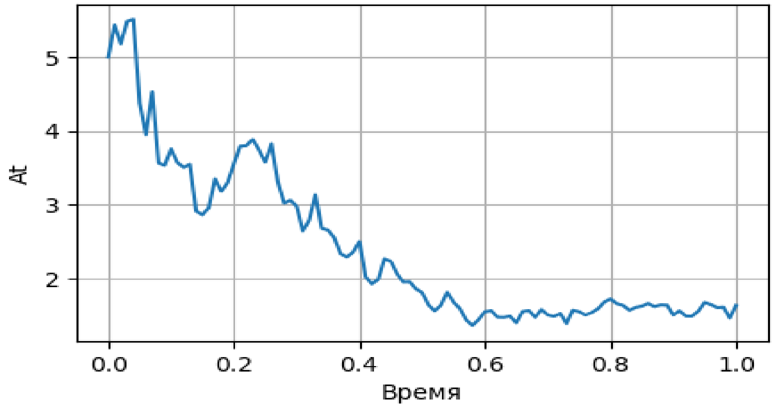

Рис. 3. Траектории рискового актива для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$
Fig. 3. Trajectory of risky asset for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

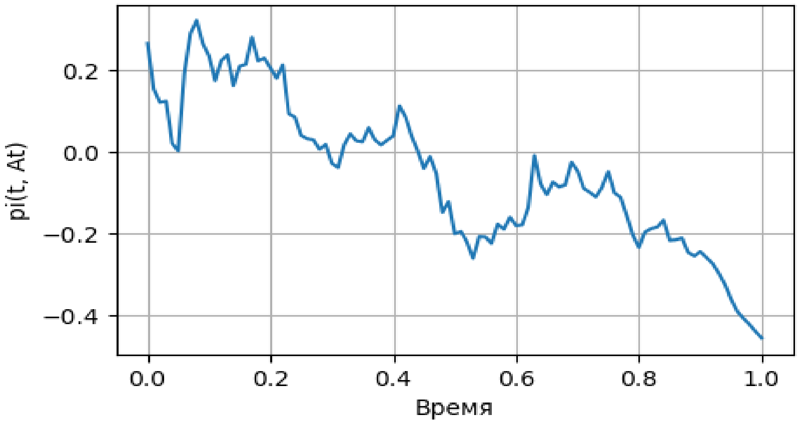

Рис. 4. Функции оптимального управления для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$
Fig. 4. Optimal control function for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

Мы представляем богатство портфеля инвестора в каждый момент времени t, значения которого зависят от вариации цен рискованных и нерискованных активов с непостоянными параметрами.

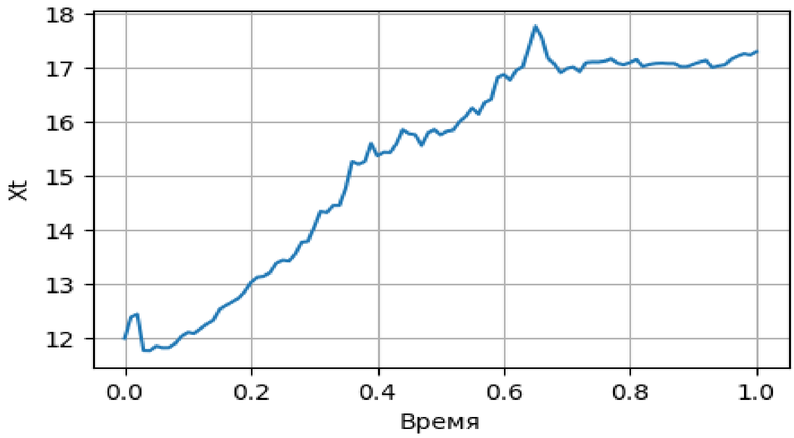

Рис. 5. Богатство портфеля инвестора для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma A_t$
Fig. 5. Wealth portfolio of investor for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma A_t$

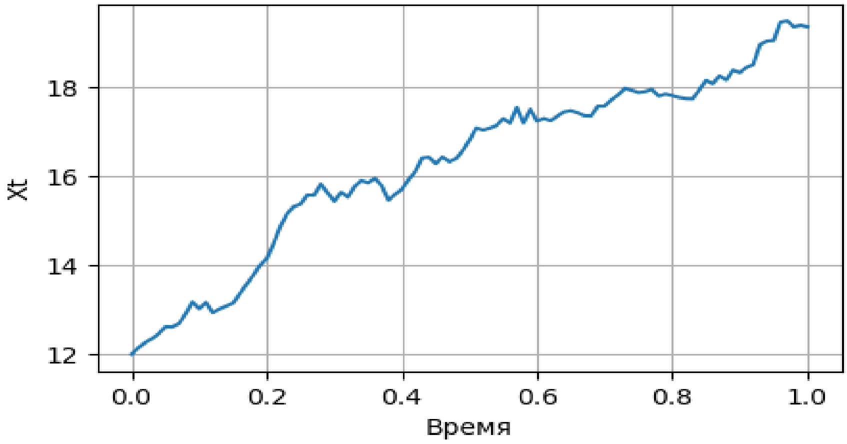

Рис. 6. Богатство портфеля инвестора для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

Fig. 6. Wealth portfolio of investor for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

Мы представили выше цену безразличия корпоративной облигации, зависящую от базового актива с непостоянным коэффициентом.

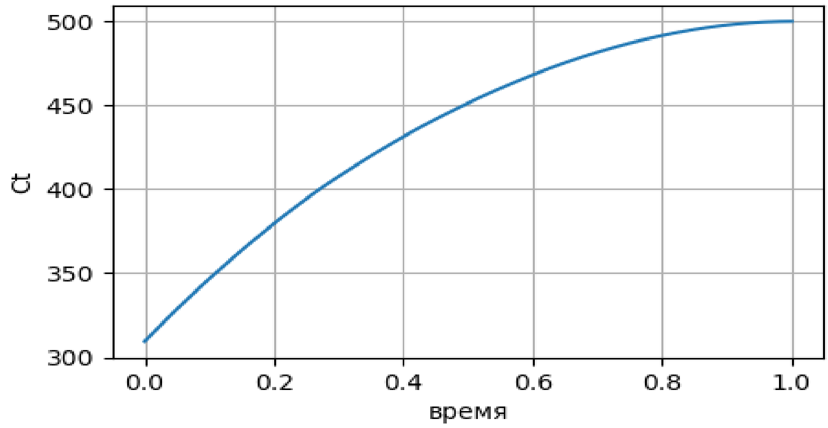

Рис. 7. Контингентное требование для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma A_t$

Fig. 7. Contingent claim for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma A_t$

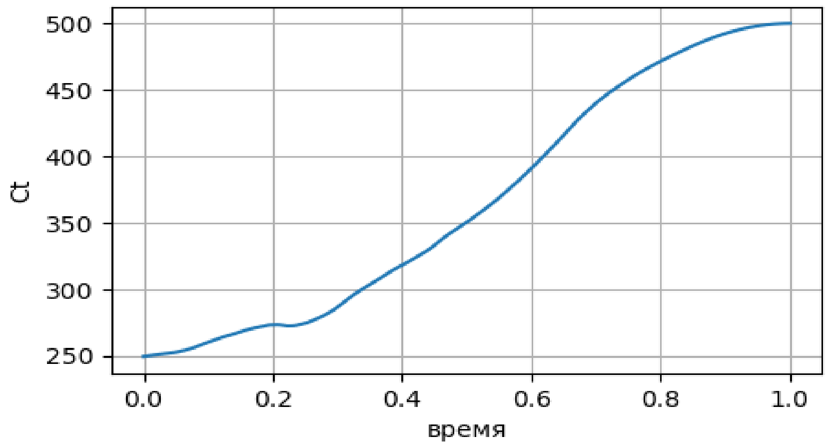

Рис. 8. Контингентное требование для $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

Fig. 8. Contingent claim for $\mu(t, A_t) = \mu A_t; \sigma(t, A_t) = \sigma\sqrt{A_t}$

Заключение

В данной работе рассмотрена оценка безразличной полезности стоимости корпоративных облигаций и премии кредитно-дефолтного свопа (CDS), которые инвестор готов принять, когда параметры модели (рыночная процентная ставка, коэффициент сноса и волатильность рискованных базовых активов) не являются постоянными и зависят от времени. В этом контексте выделены расчет оптимального портфеля инвестора и функция мгновенной стоимости каждого портфеля. Новизна данного подхода заключается в учете более реалистичных форм базовых параметров, взяв вариант моделей Блэка-Шоулза для оценки цен кредитных инструментов.

Учитывая важность для инвесторов хеджирования рисков, связанных с владением рискованными активами, будущие исследования могут рассмотреть следующие вопросы:

– как оценить цену этих кредитных инструментов в случае, когда базовый актив имеет снос и волатильность, которые зависят не только от времени, но и от другого стохастического процесса, который мы назовем «факторным процессом»;

– как оценить цену этих кредитных инструментов в случае, когда базовый актив имеет снос и волатильность, которые зависят не только от времени, но и от цепи Маркова с D состояниями.

Список источников:

1. Беллман Р. On the theory of dynamic programming // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1952. – №38. – p. 316-319.
2. Зарифопулу Т. A solution approach to valuation with unhedgeable risks // Finance Stochast. – 2001. – №5. – P. 1-82.
3. Мертон Р., Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // Journal of Economic theory. – 1971. – Т. 3. – №4. – pp. 373-413.
4. Сиглох Ж. Utility indifference pricing of credit instruments. Ph.D. Thesis, University of Toronto 2009.
5. Хендерсон В., Хобсон Д. Real options with constant relative risk aversion // *Journal of Economic Dynamics and Control. – 2002. – №27.* – pp. 329-355.
6. Ходжес С. и Нойбергер А. Optimal replication of contingent claims under transaction costs // Review of Future Markets. – 1989. – № 8. – pp. 222-239.
7. Lions P.L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Part 1: The dynamic programming principle and applications. Part 2: Viscosity solutions and uniqueness. Comm. PDE 8, 1101-1174 and 1229-1276 (1983).
8. Zhiqiang Zhang., Certainty Equivalent, Risk Premium and Asset Pricing. Higher Education Press and Springer-Verlag 2010, Front. Bus. Res. China. – 2010. – №4(2). – pp. 325-339.

References:

1. Bellman R. On the Theory of Dynamic Programming. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1952;38:316-319.
2. Zariphopoulou T. A Solution Approach to Valuation with Unhedgeable Risks. Finance Stochast. 2001;5:1-82.
3. Merton R. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. Journal of Economic Theory. 1971;3(4):373-413.
4. Sigloch **G**. Utility Indifference Pricing of Credit Instruments. Ph.D. The-sis. University of Toronto; 2009.
5. Henderson B. Hobson D. Real Options With Constant Relative Risk Aversion. Journal of Economic Dynamics and Control. 2002;27:329-355.
6. Hodges S., Neuberger A. Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs. Review of Future Markets. 1989;8:222-239.
7. Lions P.L. Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Part 1: The Dynamic Programming Principle and Applications. Part 2: Viscosity Solutions and Uniqueness. Communications in Partial Differential Equations. 1983;8:1101-1174,1229-1276.
8. Zhang Zh. Certainty Equivalent, Risk Premium and Asset Pricing. Frontiers of Business Research in China. 2010;4(2):325-339.

Информация об авторах:

Фока Оливер Джидзем
Аспирант Брянского государственного технического университета

Дмитроченко Олег Николаевич
кандидат физико-математических наук, Брянский государственный технический университет

Information about the authors:

Foka Oliver Djidzem
Graduate student of Bryansk State Technical University

Dmitrochenko Oleg Nikolaevich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Bryansk State Technical University

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 16.05.2024; одобрена после рецензирования 24.05.2024; принята к публикации 05.07.2024.

The article was submitted 16.05.2024; approved after reviewing 24.05.2024; accepted for publication 05.07.2024.

Рецензент – Подвесовский А.Г., кандидат технических наук, доцент, Брянский государственный технический университет.

Reviewer – Podvesovskii A.G., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bryansk State Technical University.