

Научноёмкие технологии в машиностроении. 2023. №11 (149). С.3-16.
Science intensive technologies in mechanical engineering. 2023. №11 (149). P. 3-16.

Научная статья
УДК 621.793.71:53.086
doi: 10.30987/2223-4608-2023-3-16

Восстановление пространственной функции распределения неоднородностей покрытия по функции распределения на шлифе

Сергей Сергеевич Кокарев¹, к.ф.-м.н.
Михаил Евгеньевич Соловьев², д.ф.-м.н.
Сергей Львович Балдаев³, к.т.н.
Лев Христофорович Балдаев⁴, д.т.н.

¹ Региональный научно-образовательный центр «Логос», Ярославль, Россия
² Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия
^{3,4} ООО «Технологические системы защитных покрытий», Москва, Щербинка, Россия
¹ logos-center@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>
² me_s@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>
³ s.baldaev@tspc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>
⁴ l.baldaev@tspc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Аннотация. При экспериментальном исследовании структуры слоя специального покрытия, наносимого на металлы методом газотермического напыления одним из основных методов, является изучение микроснимков шлифов. На основе компьютерного анализа микрофотографий можно получить функцию распределения неоднородностей в образце. Однако, поскольку микрофотография представляет собой плоское изображение, получаемая функция будет двумерной, тогда как в реальном образце распределение дефектов описывается трехмерной функцией. В настоящей работе рассмотрена проблема восстановления пространственной функции распределения дефектов в газотермическом покрытии на основании анализа микрофотографий шлифов. Реальное включение неправильной формы при этом заменяется эффективным трехосным эллипсоидом. Решена задача в общем виде редукции пространственной функции распределения f неоднородностей на функцию их распределения f_{Π} на плоскости сечения Π , включающая некоторое интегральное преобразование I . Показано, что в частном случае сферических частиц обращение I^{-1} существует и является интегральным преобразованием того же типа, что I . Рассмотрено пространственное распределение сферических частиц, не зависящее от продольной координаты z , в котором размеры частиц ограничены в каждой точке функцией $R(x, y)$, зависящей от координат. Это распределение качественно соответствует стационарной технологии напыления, при которой в глубинных слоях вблизи подложки материал покрытия проплавляется полностью и образует однородный расплав, а ближе к поверхности и краям нерасплавленные до конца частицы образуют вкрапления заметных размеров. В качестве второго примера рассмотрена редукция функции распределения Фуллера, применяемой при оптимизации гранулометрического состава порошковых материалов. Установлено, что редукция плотности функции распределения эллипсоидов на сечение плоского шлифа переносит плотность распределения центров без изменения, а произведение распределений Фуллера с независимыми параметрами переводит в произведение распределений с противоположными параметрами степени и с прежними значениями параметров эллипсоида.

Ключевые слова: порошковое покрытие, газотермическое напыление, функция распределения неоднородностей

Для цитирования: Кокарев С.С., Соловьев М.Е., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х. Восстановление пространственной функции распределения неоднородностей покрытия по функции распределения на шлифе // Научноёмкие технологии в машиностроении. 2023. № 11 (149). С. 10.30987/2223-4608-2023-3-16

Space function recovery of the distribution of coating inhomogeneities according to the distribution function on the polished specimen

Sergey S. Kokarev¹, Cand. Sc. in Ph. and M.

Mikhail E. Soloviev², Dr. Sci in Ph. and M.

Sergey L. Baldaev³, Ph.D. Eng.

Lev Kh. Baldaev⁴, D. Eng.

¹ Regional Scientific and Educational Center «Logos», Yaro-slavl, Russia

² Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

^{3,4} LLC «Technological systems of protective coatings», Moscow, Shcherbinka, Russia

¹logos-center@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>

²me_s@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

³s.baldaev@tspc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

⁴l.baldaev@tspc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Abstract. In the experimental studies of the structure of the special coating layer overlaid on metal applying gas-thermal spraying technique, one of the main methods is the study of polished specimen micrography. According to the computer analysis of microphotographs, it is possible to obtain the distribution function of inhomogeneities in the sample. However, since micrography is a flat image, the resulting function will be two-dimensional, whereas in a real sample, the distribution of defects is described by a three-dimensional function. In this paper, the problem of the space function recovery for the distribution of defects in a gas-thermal coating is viewed on the basis of the analysis of polished specimen micrography. The actual inclusion of an irregular shape is replaced by an effective three-axis ellipsoid. The problem is solved in the general form of reduction of the space function f of inhomogeneities distribution according to their distribution function f_P on the cross – sectional plane P , which includes some integral transformation I . It is shown that in the special case of spherical particles, the inversion I^{-1} exists and is an integral transformation of the same type as I . The space distribution of spherical particles is also viewed, which does not depend on the longitudinal coordinate z , where particle sizes are limited at each point by a function $R(x,y)$, depending on the coordinates. This distribution is suitable in its essence to the stationary spraying technology, when in deep layers near the substrate, the coating material melts completely and forms a single melt, while closer to the surface and edges, the parts that are not completely melted form inclusions of noticeable sizes. The reduction of the Fuller distribution law, used to optimize the granulometric composition of powder materials, is viewed as a second example. It is found that the reduction of the density of the ellipsoid distribution function to the section of a flat strip transfers the density of the distribution of centers as original, and the product of Fuller distributions times independent parameters is transformed into the product of distributions times the opposite degree parameters and also the previous values of the parameters of the ellipsoid

Keywords: powder coating, gas thermal spraying, inhomogeneity distribution function

For citation: Kokarev S.S., Soloviev M.E., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh. Space function recovery of the distribution of coating inhomogeneities according to the distribution function on the polished specimen / Science intensive technologies in mechanical engineering. 2023. № 11 (149). P. 3–16. doi: 10.30987/2223-4608-2023-3-16

Введение

Одной из распространенных методик экспериментального исследования внутренней структуры слоя, напыленного с помощью газотермической [1 – 3], плазменно-разрядной [4] или лазерной технологии [5, 6], является снятие поперечных шлифов с дорожки напыления и изучение неоднородностей в сечении шлифа [7 – 9]. С помощью специальных компьютерных программ, работающих на основе различных алгоритмов распознавания изображений [10 – 12], можно получать, таким образом, различные количественные характеристики покрытия, одной из которых является функция распределения неоднородностей [13 – 15]. На функцию распределения неоднородностей

могут влиять различные технологические факторы: условия нанесения покрытия [12], состав порошка [13], структура материала [14, 15].

При экспериментальной оценке функции распределения неоднородностей на основании анализа микрофотографий шлифов возникает чисто теоретическая нетривиальная проблема экстраполяции эмпирической функции распределения неоднородностей в сечении шлифа на пространственную функцию распределения, которая и представляет реальный практический интерес. В настоящей статье рассматривается задача экстраполяции в некоторой упрощенной постановке, при которой типичным паттерном неоднородности является трехосный эллипсоид.

Определение пространственной функции распределения неоднородностей

Полагая, что процесс формирования покрытия содержит неустраняемый и неконтролируемый случайный фактор, в результате которого частицы порошка или легирующей добавки имеют вид отдельной фазы (зерен), вкрапленной в матрицу основного вещества, целесообразно использовать функцию распределения этих зерен по совокупности существенных переменных, которые являются случайными величинами. Эту функцию можно определить следующим образом. Примем, что каждое зерно представляет собой трехосный эллипсоид $E(\xi)$ (или эффективный эллипсоид, в некотором строго определенном смысле, заменяющий реальное зерно с неправильной формой), который характеризуется в пространстве набором параметров:

$$\xi = \{X, \Theta, A\}, \quad (1)$$

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \theta \in [0; \pi/2], \quad \varphi \in [0; \pi]. \quad (2)$$

Набор $A = (a_1, a_2, a_3)$ – набор полуосей эллипсоида, причем $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

Определим теперь функцию распределения $f(\xi)$ посредством следующего соотношения: вероятность $dP(\xi)$ того, что эллипсоид имеет параметры ξ лежащие в объеме dV_ξ в окрестности точки ξ дается выражением:

$$dP(\xi) = f(\xi)dV_\xi = f(\xi)dV_X \cdot dV_\Theta \cdot dV_A, \quad (3)$$

где $dV_X = dx dy dz$; $dV_\Theta = d\Omega(\theta, \varphi)d\varphi$; $dV_A = da_1 da_2 da_3$ – мера (элементы объемов) в подпространствах параметров, при этом $d\Omega(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi$ – стандартный элемент телесного угла (элемент площади на единичной сфере). Из общих соображений $f(\xi) \geq 0$ и удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{R_\xi^9} f(\xi)dV_\xi = 1, \quad (4)$$

где R_ξ^9 – девятимерная область определения f пространства параметров.

Редукция пространственной функции распределения: общий подход

Перейдем теперь к задаче о редукции пространственной плотности вероятности $f(\xi)$

где $X = (x, y, z)$ – положение центра E в пространстве в некоторой системе координат, жестко связанной с материалом покрытия; Θ – пространство угловых переменных, которое можно параметризовать матрицей $L(\vec{n}, \varphi)$ вращения вокруг оси n на угол φ и которое задает ориентацию эллипсоида по отношению к некоторой начальной ориентации. Последнюю можно определить как такое положение трехосного эллипсоида, при котором меньшая полуось ориентирована вдоль оси x , средняя – вдоль оси y , и самая большая – вдоль оси z . При этом, с учетом симметрии эллипсоида, следует ограничить направления вектора \vec{n} верхним полупространством, в котором $z \geq 0$, а угол вращения $\varphi \in [0; \pi)$. Таким образом, в сферической системе координат (θ, φ) , ассоциированной стандартным образом с выбранной декартовой, вектор \vec{n} будет иметь следующие компоненты:

распределения эллиптических неоднородностей на плоскость и вопросу о ее восстановлении по функции $f_\Pi(\xi_\Pi)$, снятой на каком-то плоском сечении Π . Уравнение произвольного эллипсоида в пространстве получается из его уравнения в специальной системе координат $\{X, Y, Z\}$, согласованной с его центром и осями:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1, \quad (5)$$

с помощью подстановки:

$$\vec{R} \mapsto \vec{R}' = L(\vec{n}, \varphi)(\vec{R} - \vec{r}), \quad (6)$$

где $\vec{R} = (X, Y, Z)$; $\vec{R}' = (X', Y', Z')$; $\vec{r} = (x, y, z)$ – координаты центра эллипсоида; $L(\vec{n}, \varphi)$ – матрица вращения вокруг оси \vec{n} на угол φ . После подстановки (6) в (5), уравнение (5) примет вид:

$$Q_2(\vec{R}, \vec{R}) + Q_1(\vec{R}) + Q_0 = 0, \quad (7)$$

где Q_2, Q_1, Q_0 – квадратичная, линейная формы и форма нулевого порядка соответственно, коэффициенты которых зависят от девяти параметров: трех координат центра $(x, y, z) = \vec{r}$, трех угловых переменных $(\theta, \varphi, \varphi) = \Theta$, и трех параметров

полуосей эллипсоида $(a_1, a_2, a_3) = A$. Ввиду громоздкости этих зависимостей они не приводятся здесь в явном виде. На плоскости Π полагаем $Z = 0$ и получаем уравнение эллипса в виде:

$$Q_2(\vec{R}_\Pi, \vec{R}_\Pi) + Q_1(\vec{R}_\Pi) + Q_0 = 0, \quad (8)$$

которое тоже включает в себя квадратичную, линейную формы и форму нулевого порядка по координатам $\vec{R}_\Pi = (X, Y)$ плоскости Π . На этой плоскости произвольный эллипсоид получается из канонического:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

$$P_{2|XX} = \frac{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \psi}{a^2 b^2}; P_{2|YY} = \frac{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \psi}{a^2 b^2}; P_{2|XY} = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} \sin 2 \psi;$$

$$P_{1|X} = 2 \frac{x_\Pi((a^2 - b^2) \cos^2 \psi - a^2) + y_\Pi \sin \psi \cos \psi (b^2 - a^2)}{a^2 b^2};$$

$$P_{1|Y} = 2 \frac{y_\Pi((b^2 - a^2) \cos^2 \psi - b^2) + x_\Pi \sin \psi \cos \psi (b^2 - a^2)}{a^2 b^2};$$

$$P_{0|X} = \frac{x_\Pi^2((b^2 - a^2) \cos^2 \psi + a^2) + y_\Pi^2((a^2 - b^2) \cos^2 \psi + b^2) + 2x_\Pi y_\Pi \sin \psi \cos \psi (a^2 - b^2)}{a^2 b^2}.$$

На плоскости Π именно пять параметров $\{x_\Pi, y_\Pi, a, b, \psi\} \equiv \xi_\Pi$ являются наблюдаемыми.

Рассмотрим теперь семейство эллипсоидов, которые в сечении плоскостью Π дают один и тот же эллипс с фиксированным набором параметров ξ_Π . Это семейство характеризуется четырехмерной поверхностью в девятимерном пространстве параметров $\xi \in R^9$, уравнение на которую получается из требования эквивалентности уравнений (7) и (11), что сводится, по существу, к пропорциональности коэффициентов соответствующих форм:

$$y_1 = Q_{2|XX}(\xi); y_2 = Q_{2|YY}(\xi); y_3 = Q_{2|XY}(\xi); y_4 = Q_{1|X}(\xi); y_5 = Q_{1|Y}(\xi), \quad (13)$$

и дополним этот набор до девяти частью старых параметров z, a_1, a_2, a_3 . В итоге получаем замену системы координат:

$$\xi = (X, \Psi, A) \rightarrow \xi' = (Y, z, A), \quad (14)$$

с помощью подстановки, аналогичной (6):

$$\vec{R}_\Pi \mapsto \vec{R}'_\Pi = L(\vec{e}_z, \psi)(\vec{R}_\Pi - \vec{r}_\Pi), \quad (10)$$

где $\vec{R}_\Pi = (X, Y)$; $\vec{R}'_\Pi = (X', Y')$; $\vec{r}_\Pi = (x_\Pi, y_\Pi)$ – координаты центра эллипса на плоскости Π ; $L(\vec{e}_z, \psi)$ – матрица вращения на плоскости Π на угол ψ . Коэффициенты результирующих форм P_2, P_1, P_0 , определяющих уравнение произвольного эллипса на плоскости Π :

$$P_2(\vec{R}_\Pi, \vec{R}_\Pi) + P_1(\vec{R}_\Pi) + P_0 = 0 \quad (11)$$

имеют следующий явный вид:

$$Q_2(\xi) = \lambda P_2(\xi_\Pi); \quad Q_1(\xi) = \lambda P_1(\xi_\Pi) \quad (12)$$

– пять уравнений в компонентах, а равенство $Q_0(\xi) = \lambda P_0(\xi_\Pi)$ является просто определением параметра пропорциональности λ . Для корректного переноса функции $f(\xi)$ на плоскость Π теперь целесообразно ввести в пространстве параметров ξ новую систему координат: в качестве новых координат следует взять пять функций, входящих в левые части уравнений (12). А именно, положим:

где $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Эти пять координат должны оставаться фиксированными для всех эллипсоидов, дающих один и тот же эллипс в сечении плоскостью Π , т. е. уравнение поверхности этого семейства эллипсоидов в новых координатах имеет вид: $Y = const$.

Замене переменных (14) соответствует 9×9 матрица Якоби $J(\xi'|\xi)$ и ее определитель (якобиан) $|J(\xi'|\xi)|$, где:

$$J(\xi'|\xi) = \left(\frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right), \quad (15)$$

причем эта матрица единична по строкам, соответствующим части старых переменных z, A . По этой причине якобиан преобразования (14) фактически равен частичному якобиану:

$$dP = f(\xi) dV_x dV_\Theta dV_A = f(x(Y), y(Y), z, \Theta(Y), a_1, a_2, a_3) \Delta^{-1}(x(Y), y(Y), \Theta(Y)) dV_Y dz dV_A, \quad (17)$$

где предполагается, что $\Delta \neq 0$, преобразование по общей теореме об обратном отображении локально обратимо и параметры $x, y, \theta, \varphi, \Phi$ можно выразить в виде функций от y_i и, к примеру, запись $f(Y)$ является сокращением $f(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$.

$$dP \rightarrow dP'_\Pi = \int_{D \subset R^4} dP = \left(\int_{D \subset R^4} \frac{f(x(Y), y(Y), z, \Theta(Y), a_1, a_2, a_3)}{\Delta(x(Y), y(Y), \Theta(Y))} dz dV_A \right) dV_Y. \quad (18)$$

После интегрирования зависимость dP'_Π от ненаблюдаемых переменных z, A полностью пропадает. Теперь для окончательного перехода на плоскость переменных Π нужно сделать еще одну замену переменных:

$$Y \rightarrow (x_\Pi, y_\Pi, \psi, a, b), \quad (19)$$

$$dP_\Pi(\xi_\Pi) = \left(\int_{D \subset R^4} \frac{f(x(Y), y(Y), z, \Theta(Y), A)}{\Delta(x(Y), y(Y), \Theta(Y))} dz dV_A \right) \Big|_{Y=g(\xi_\Pi)} \delta(\xi_\Pi) dV_{\xi_\Pi}, \quad (20)$$

откуда, окончательно:

$$f_\Pi(\xi_\Pi) = \left[\left(\int_{D \subset R^4} f(x(Y), y(Y), z, \Theta(Y), A) dz dV_A \right) \frac{\delta(\xi_\Pi)}{\Delta(x(Y), y(Y), \Theta(Y))} \right] \Big|_{Y=g(\xi_\Pi)}. \quad (21)$$

Формула (21) и решает в общем виде задачу редукции пространственной функции распределения f неоднородностей на функцию их распределения f_Π на плоскости сечения Π . Ввиду громоздкости общих формул перехода $\xi \rightarrow \xi' \rightarrow \xi_\Pi$ использование этой формулы в общем случае возможно только в численном

$$|J(\xi'|\xi)| = |J(Y|x, y, \Theta)| = \Delta(x, y, \Theta), \quad (16)$$

который зависит только от части переменных, что отражено в обозначении. Записывая теперь элемент вероятности (3) в новых координатах, с учетом правила якобианов $|J(\xi'|\xi)| dV_\xi = dV_{\xi'}$ для преобразования элементов объема, получим:

Теперь можно частично проинтегрировать выражение (17) по совокупности дополнительных переменных, которые являются ненаблюдаемыми на плоскости Π :

которое, фактически, задают равенства (12) и (13) в совокупности. Если обозначить эти соотношения символически $Y = g(\xi_\Pi)$, а соответствующий якобиан преобразования $J(Y|\xi_\Pi)$ обозначить $\delta(\xi_\Pi)$, то формула (18) примет вид:

виде. Задача ее обращения в общем виде или даже в конкретном случае остается под вопросом. Формально она ставится так: по известной функции распределения $f_\Pi(\xi_\Pi)$ (возможно, при некоторых дополнительных предположениях) вывести формулу для $f(\xi)$. Схематически обе задачи иллюстрируются диаграммами:

$$f(\xi) \xrightarrow{I-(21)} f_\Pi(\xi_\Pi); \quad f_\Pi(\xi_\Pi) \xrightarrow{I^{-1}(21)} f(\xi), \quad (22)$$

где первая стрелка характеризует задачу редукции, которая в общем виде решается формулой (21), включающей некоторое интегральное преобразование I , а вторая стрелка характеризует задачу восстановления пространственной функции распределения с помощью обращения I , если такое обращение существует. В следующем разделе будет показано, что при некоторых разумных предположениях в самом простом случае сферических частиц обращение I^{-1} существует и является интегральным преобразованием того же типа, что I .

Редукция пространственной функции распределения для сферических частиц

В качестве пробной (и практически важной!) задачи, на основе которой можно понять методику редукции и восстановления функции распределения, рассмотрим случай сферических частиц-зерен. В этом случае, ввиду сферической симметрии частиц, теряет смысл ориентация зерен и девятимерное пространство параметров ξ редуцируется до четырехмерного пространства R_{ξ}^4 , три координаты которого отвечают за положения центров сфер, а четвертая – за их радиусы a . Ввиду значительного изменения размерности области определения, удобнее пользоваться не общей формулой (21), а проделать вывод заново, с целью

избежания громоздких выкладок с простым конечным результатом. Пусть, как и раньше, Π – плоскость сечения, которую без ущерба для общности можно принять за плоскость XU выбранной декартовой системы координат. Если $f(x, y, z, a)$ – функция распределения зерен в пространстве, то функция распределения на плоскости Π получится из нее посредством надлежащей замены переменной, которая приводит к некоторому интегральному преобразованию исходной функции распределения. Действительно, рассмотрим сферическую частицу некоторого радиуса a в ее сечении плоскостью Π . Это сечение представляет собой круг радиуса r , который связан с радиусом шара посредством соотношения:

$$r = \sqrt{a^2 - z^2}, \quad (23)$$

где $|z|$ – расстояние от центра шара до плоскости Π в выбранной системе координат. Очевидно, что «правильной переменной» в плоскости Π является именно величина r , а не a , поскольку именно первая переменная наблюдается на плоскости, а последняя на ней не видима, равно как и сама координата z . Таким образом, правильный переход от функции f к функции f_{Π} заключается в переходе от переменной a к переменной r :

$$dP = f(x, y, z, a)dV_{\Pi}dzda = f(x, y, z, \sqrt{r^2 + z^2})dV_{\Pi}dz \frac{da}{dr} dr, \quad (24)$$

где $dV_{\Pi} = dx dy$, и промежуточному интегрированию по z , поскольку целое семейство пространственных шаров, положение которых удовлетворяет уравнению (23), дает одно и то же сечение в плоскости Π . С учетом того, что $da/dr = r/\sqrt{r^2 + z^2}$, для вероятности dP_{Π} обнаружения круговой неоднородности в плоскости Π в объеме параметров $[x; x + dx] \times [y; y + dy] \times [r; r + dr]$, т. е. получаем:

$$dP_{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y, z, \sqrt{r^2 + z^2})r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz dV_{\Pi} dr. \quad (25)$$

В формуле (25) предполагается, что функция f имеет компактный носитель по четвертой переменной (т. е. равна нулю вне некоторого конечного промежутка R), либо спадает

на z -бесконечности достаточно быстро (подойдет любая отрицательная степень z в асимптотике f при $|z| \rightarrow \infty$), чтобы несобственный интеграл сходился. Следуя общей логике определения функции распределения, отсюда заключаем, что редуцированная на плоскость функция распределения

$$f_{\Pi}(x, y, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y, z, \sqrt{r^2 + z^2})r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz \quad (26)$$

представляет собой нетривиальное интегральное преобразование типа преобразования Абеля (модифицированное преобразование Абеля). Очевидно, что вклад в распределение круговых неоднородностей на плоскости Π получается как от шаров с центрами, лежащими в полупространстве $z > 0$, так и $z < 0$, хотя,

возможно в разной степени ввиду того, что функция f явно зависит от z . При этом на плоскости Π вклады от одного полупространства и другого неотличимы. Поэтому имеет смысл представить выражение (26) в виде, отражающем эту неотличимость. Для этой цели

$$f_{\Pi}(x, y, r) = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) \frac{f(z, \sqrt{r^2+z^2})r}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = \quad (27)$$

$$= \left(- \int_0^{-\infty} + \int_0^{\infty} \right) \frac{f(z, \sqrt{r^2+z^2})r}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = \int_0^{\infty} \frac{f(-z, \sqrt{r^2+z^2})r}{\sqrt{r^2+z^2}} dz +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{f(z, \sqrt{r^2+z^2})r}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = 2r \int_0^{\infty} \frac{f_+(z, \sqrt{r^2+z^2})}{\sqrt{r^2+z^2}} dz,$$

где $f_+(x) \equiv \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ – четная часть функции f . Таким образом, окончательная формула:

$$f_{\Pi}(x, y, r) = 2r \int_0^{\infty} \frac{f_+(x, y, z, \sqrt{r^2+z^2})}{\sqrt{r^2+z^2}} dz, \quad (28)$$

решает прямую задачу для функции распределения сферических неоднородностей: по известной пространственной функции распределения $f(x, y, z, a)$ она позволяет вычислить

$$f(x, y, z, a) = A(kx^4y^2 - a)^2\theta(kx^4y^2 - a), \quad (29)$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, равная единице при $x \geq 0$, и равная нулю при $x < 0$. Эту зависимость легче интерпретировать, если переписать ее в свернутом виде: $f = A(R(x, y) - a)^2\theta(R(x, y) - a)$. Она описывает пространственное распределение сферических частиц, не зависящее от продольной координаты z , в котором размеры частиц ограничены в каждой точке функцией $R(x, y)$, зависящей от координат, причем вблизи начала

разобьем область интегрирования на части $z < 0$ и $z > 0$ и выполним следующие преобразования (пишем выражения в сокращенном виде, выделяя только существенные для выкладки зависимости):

функцию распределения плоского сечения Π среды с помощью некоторого интегрального преобразования.

Пример 1. Редукция с зависимостью от двух координат

В качестве примера рассмотрим пространственную функцию распределения вида:

системы координат размеры частиц малы. Это распределение качественно соответствует стационарной технологии напыления, при которой в глубинных слоях вблизи подложки материал покрытия проплавляется полностью и образует однородный расплав, а ближе к поверхности и краям нерасплавленные до конца частицы образуют вкрапления заметных размеров. Применение формулы (28) приводит к зависимости:

$$f_{\Pi}(x, y, r) = Ar^3 \left[\left(1 + \frac{2k^2x^8y^4}{r^2} \right) \ln \left(\sqrt{\frac{k^2x^8y^4}{r^2} - 1} + \frac{kx^4y^2}{r} \right) - \right. \quad (30)$$

$$\left. - \frac{3kx^4y^2}{r} \sqrt{\frac{k^2x^8y^4}{r^2} - 1} \right].$$

Сравнительное поведение зависимостей f и f_{Π} для рассматриваемого примера показано на рис. 1.

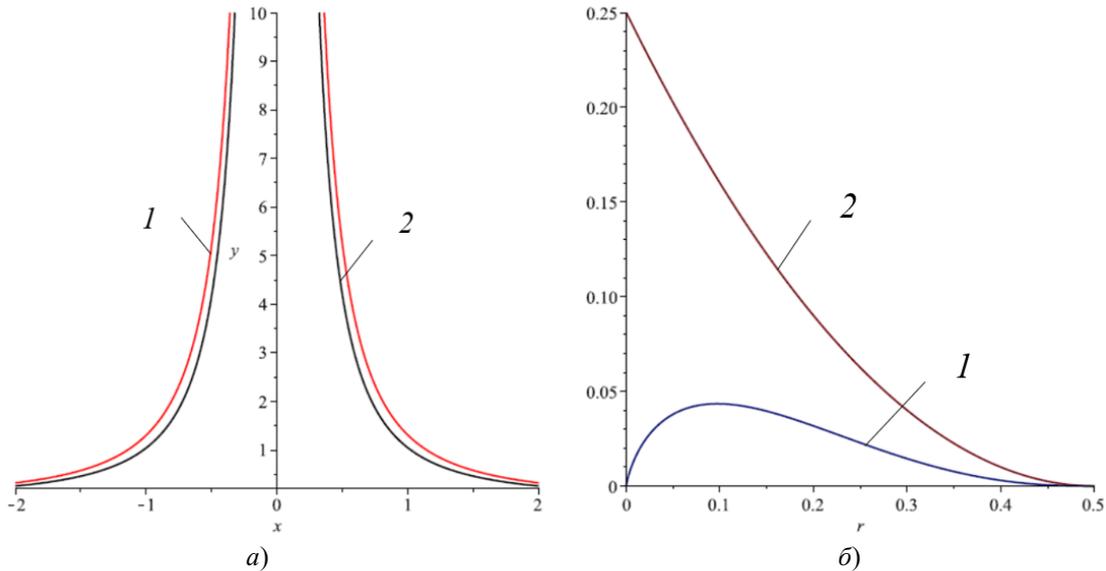


Рис. 1. Зависимости для выражения (30) и его преобразования (28) соответственно при $A = 1, 0; k = 0, 5$:
 а – эквипотенциальные линии $f = f_p = 0,2$ при $a = r = 0,1$ на плоскости переменных (x, y) ; б – распределения по размерам в точке $x = y = 1,0$ (верхняя кривая – f , нижняя f_{II});
 1 – зависимость f_{II} ; 2 – зависимость f

Fig. 1. Dependences for the equation (30) and its transformations (28), respectively, at $A = 1, 0; k = 0, 5$:
 а – equipotential lines $f = f_p = 0,2$ at $a = r = 0,1$ on the plane of variables (x, y) ; б – size distributions at the point $x = y = 1,0$;
 1 – dependence f_{II} ; 2 – dependence f

Как это наглядно видно из приведенных рисунков, зависимость от поперечных координат переносится интегральным преобразованием практически без заметных изменений, в то время как распределение частиц по размерам трансформируется существенно или даже кардинально, особенно в области частиц малых размеров.

Пример 2. Редукция распределения Фуллера

Предположим, что имеется плоский слой с координатой x , ориентированной вдоль толщины слоя: $x \in [0; \ell]$, в котором плотность функции распределения частиц имеет вид:

$$f(x, a) = g(x) \cdot \Phi(a), \quad (31)$$

где была учтена четность подынтегральной функции и конечность верхнего предела интегрирования, на котором аргумент $\Phi(a)$ должен принимать свое максимальное значение a_0 . Интеграл (33) выражается через

где $g(x)$ – некоторое распределение центров частиц;

$$\Phi(a) = \begin{cases} (a/a_0)^s/a_0, & a \in [0; a_0]; \\ 0, & a \notin [0; a_0] \end{cases} \quad (32)$$

– плотность распределения Фуллера с параметром максимального размера a_0 и параметром степени $-0,5 \leq s \leq 0$. Поскольку распределение по размерам факторизовано с распределением по координатам центров и от координаты z , нормальной к сечению шлифа, плотность функции распределения $f(x, a)$ не зависит, то формула редукции (26) сохранит координатную часть $g(x)$ неизменной и можно сосредоточиться лишь на преобразовании части $\Phi(a)$, отвечающей за размеры. Имеем по формуле (26):

$$\Phi_{II}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\sqrt{r^2+z^2})r}{\sqrt{r^2+z^2}} dz = \frac{2r}{a_0^{s+1}} \int_0^{\sqrt{a_0^2-r^2}} (r^2+z^2)^{(s-1)/2} dz, \quad (33)$$

гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ таким образом, что редуцированная на плоскость шлифа функция плотности распределения по размерам частиц имеет вид:

$$\Phi_{\Pi}(r) = \frac{2r^s \sqrt{a_0^2 - r^2}}{a_0^{s+1}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \frac{a_0^2}{r^2}\right). \quad (34)$$

Сравнительное поведение зависимостей Φ и Φ_{Π} для рассматриваемого примера при $a_0 = 1,0$; $s = -0,3$ показано на рис. 2.

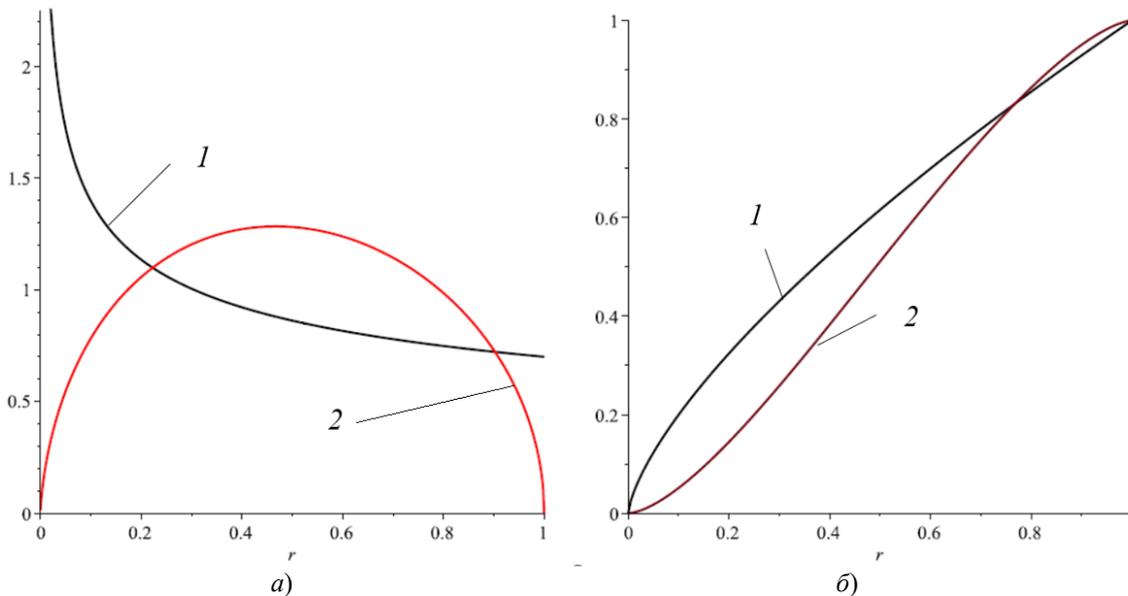


Рис. 2. Зависимости при $a_0 = 1,0$; $s = -0,3$ (а); интегральные распределения для тех же зависимостей при тех же параметрах (б):

1 – зависимость Φ ; 2 – зависимость Φ_{Π}

Fig. 2. Dependencies at $a_0 = 1,0$; $s = -0,3$ (a); integral distributions for the same dependencies at the same parameters (b):

1 – dependence Φ ; 2 – dependence Φ_{Π}

Как хорошо видно из приведенных зависимостей, редуцированная на плоскость плотность распределения Фуллера заметно отличается на краях от его пространственного оригинала – она обращается там в ноль. Для интегральных функций распределения наблюдается качественно та же картина: вблизи нуля редуцированная интегральная функция заметно отстает от пространственной, а вблизи правого края распределения она несколько опережает пространственную. Эти обстоятельства необходимо учитывать для правильной интерпретации результатов обработки данных по эмпирическому распределению неоднородностей на шлифах.

Восстановление пространственной функции распределения

Формулой (28) можно пользоваться и в обратную сторону для приближенного восстановления пространственной функции

распределения. Действительно, если считать, что функция в левой части (28) известна из исследования шлифа, а для функции в правой части на основе экспериментальных данных или некоторых общих теоретических соображений выбран некоторый аппроксиматор, содержащий разумное число параметров, то выполняя интегрирование в правой части было получено равенство двух функций, которое можно понимать в смысле задачи регрессионного анализа. Такой подход не гарантирует высокой точности и в неблагоприятном случае потребует большого числа параметров регрессии.

Более строгая постановка задачи подразумевает обращение формулы (28), точнее, даже его принципиальной возможности. Можно утверждать, что, в случае зависимости функции f от координаты z , эта задача не может иметь решения, поскольку, подбирая эту зависимость надлежащим образом при любой зависимости f от переменной a , первой можно

компенсировать последнюю и получить любую наперед заданную зависимость f_{Π} , что очевидно из структуры выражения (28). С другой стороны, практически важный для любой технологии напыления случай, в котором f не зависит от координаты z (т. е. от координаты вдоль дорожки напыления), соответствует ситуации стационарной работы плазменной свечи, которая напыляет материал на поверхность в строго фиксированных условиях и свойства покрытия стационарны вдоль длины дорожки. В этом случае точное обращение формулы (28) оказывается возможным и в этом разделе была выведена формула для него.

Стартуем с формулы (28), в которой, в силу независимости f от z $f_+ = f$. Опуская несущественную для дальнейших рассуждений зависимость f и f_{Π} от поперечных координат $\{x, y\}$ (они в последующих рассмотрениях

являются постоянными параметрами и зависимость от них тривиально переносится с f на f_{Π} и обратно как зависимость от параметров), перепишем формулу (28) в более простом виде:

$$f_{\Pi}(r) = 2r \int_0^{\infty} \frac{f(\sqrt{r^2+z^2})}{\sqrt{r^2+z^2}} dz. \quad (35)$$

Вводя новую удобную переменную $u = \sqrt{r^2+z^2}$; $dz/\sqrt{r^2+z^2} = du/z = du/\sqrt{u^2-r^2}$, интеграл в (35) можно переписать в виде:

$$f_{\Pi}(r) = 2r \int_r^{\infty} \frac{f(u)}{\sqrt{u^2-r^2}} du, \quad (36)$$

в котором зависимость $f(u)$ является искомой, а $f_{\Pi}(r)$ считается известной. Умножим обе части уравнения (36) на $(r^2-s^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем их по r в пределах от s до $+\infty$. В результате получим:

$$\int_s^{\infty} \frac{f_{\Pi}(r)}{\sqrt{r^2-s^2}} dr = 2 \int_s^{\infty} r \int_r^{\infty} \frac{f(u)}{\sqrt{u^2-r^2} \cdot \sqrt{r^2-s^2}} dr du = 2 \int_{W_2} \frac{f(u)}{\sqrt{u^2-r^2} \cdot \sqrt{r^2-s^2}} dr du \quad (37)$$

– интеграл по клиновидной области W_2 на плоскости $r-u$ (рис. 3), задаваемой системой неравенств: $s \leq r < \infty$ и $r \leq u < \infty$.

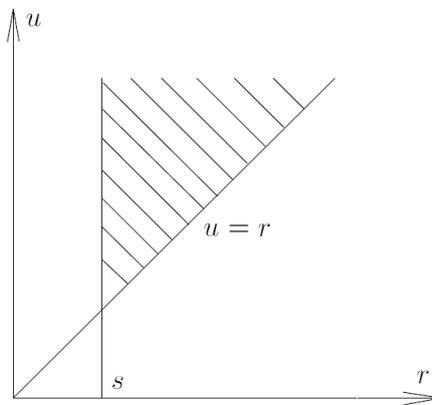


Рис 3. Область интегрирования в двойном интеграле (37)

Fig. 3. The area of integration in the double integral (37)

Выполним интегрирование по этой области последовательно: сначала по переменной r в пределах от s до u , а потом по переменной

u в пределах от s до ∞ . Первое интегрирование не зависит от вида $f(u)$ и сводится к вычислению безразмерного интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int_s^u \frac{r dr}{\sqrt{u^2-r^2} \sqrt{r^2-s^2}} \stackrel{q=r^2}{=} \frac{1}{2} \int_{s^2}^{u^2} \frac{dq}{\sqrt{u^2-q} \sqrt{q-s^2}} \stackrel{t=\sqrt{q-s^2}}{=} \\ &= \int_0^{\sqrt{u^2-s^2}} \frac{dt}{\sqrt{u^2-s^2-t^2}} \stackrel{\eta=t/\sqrt{u^2-s^2}}{=} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя этот результат в (37), получаем:

$$\int_s^\infty \frac{f_\Pi(r)}{\sqrt{r^2-s^2}} dr = \pi \int_s^\infty f(u) du, \quad (39)$$

откуда, дифференцируя обе части по s , получаем искомое обращение:

$$f(s) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \int_s^\infty \frac{f_\Pi(r)}{\sqrt{r^2-s^2}} dr. \quad (40)$$

Пример 1. Восстановление линейной редуцированной функции распределения

В качестве примера рассмотрим наблюдаемую функцию f_Π в виде линейной убывающей до нуля зависимости:

$$f_\Pi = A \left(1 - \frac{r}{r_0}\right), \quad (41)$$

где r_0 и A – некоторые параметры (возможно, зависящие от координат x, y на Π). Применение формулы (40) к этой зависимости приводит к функции распределения в пространстве:

$$f = \frac{A}{\pi s} \sqrt{1 - \frac{s^2}{r_0^2}}. \quad (42)$$

Рассматриваемые зависимости представлены на рис. 4

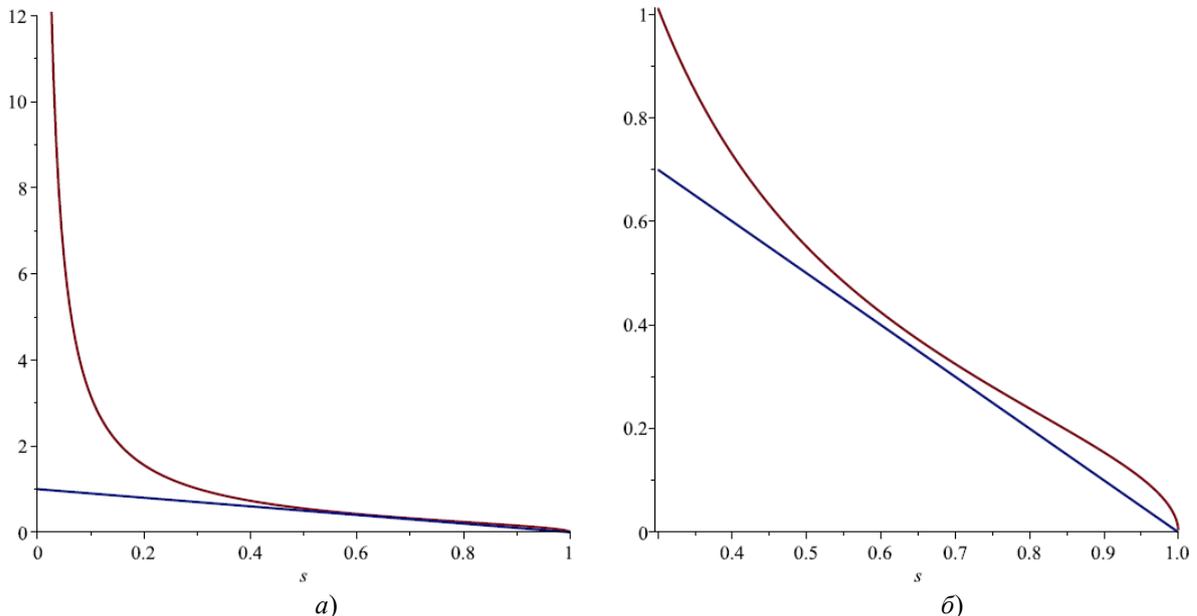


Рис. 4. Плоская и восстановленная по ней пространственная функции распределения сферических неоднородностей в сравнении (а); увеличенный масштаб вблизи правых концов при $A = r_0 = 1, 0$ (б)

Fig. 4. The planar and reconstructed space function of the distribution of spherical inhomogeneities in comparison (a); an enlarged scale near the right ends at $A = r_0 = 1, 0$ (b)

Рис. 4 иллюстрирует общую закономерность: плоские и пространственные функции распределения по размерам сферических неоднородностей близки друг к другу в области неоднородностей максимальных размеров и довольно сильно расходятся в области неоднородностей малых размеров. Нетривиальный характер близости в области больших размеров дополнительно проиллюстрирован на правом рисунке, который более детально отражает поведение зависимостей на правой границе распределений. Существование предельного размера в плоской функции распределения получает простое

объяснение: в восстановленной пространственной функции распределения отсутствуют частицы с размером большим, чем r_0 , следовательно, и у сечений этих частиц не может быть большего размера. Далее, частицы большого размера попадают в сечение плоскостью Π с большей вероятностью, чем частицы малых размеров, по чисто геометрическим причинам, поэтому для соблюдения линейного закона убывания плоской функции распределения, плотность вероятности мелких частиц в пространстве должна быть существенно выше, что и отражают полученные теоретические зависимости.

**Редукция функции распределения
эллипсоидов**

Рассмотрим теперь частицы примесей в виде эллипсоидов вращения в слое с поперечной координатой X с плотностью функцию распределения:

$$f(x, a_1, a_2) = g(x) \cdot \Phi_1(a_1) \cdot \Phi_2(a_2), \quad (43)$$

где $g(x)$ – некоторое распределение центров частиц вдоль толщины; $\Phi_1(a_1), \Phi_2(a_2)$ – распределения Фуллера, задаваемые парой параметров $\{(a_{01}, s_1), (a_{02}, s_2)\}$ для каждой из полуосей, при этом оси вращения всех эллипсоидов параллельны оси X . Поскольку рассматривается очень простой частный случай общей схемы «Редукция пространственной функции распределения для сферических частиц», то для сокращения выкладок имеет смысл не пользоваться приведенными там общими громоздкими формулами, а проиллюстрировать их смысл, заново проделав процедуру редукции в явном виде. Уравнение некоторого пространственного эллипсоида вращения E в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{(X-x)^2}{a_1^2} + \frac{(Y-y)^2 + (Z-z)^2}{a_2^2} = 1. \quad (44)$$

$$f_{\Pi}(x, a, b) = \int_{-L}^L g(x) \cdot \Phi_1\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \Phi_2\left(\sqrt{b^2 + z^2}\right) dz \sim \quad (48)$$

$$g(x) a^{s_1} b^{s_2+1} \int_{-\xi_L}^{\xi_L} (1 + \xi^2)^{(s_1+s_2)/2} d\xi \equiv a^{s_1} b^{s_2+1} I(\xi_L, (s_1 + s_2)/2),$$

где $\xi_L = \frac{L}{b}$; L – размер слоя в z -направлении, который надо рассматривать как параметр

Пусть плоскость шлифа Π совпадает с плоскостью $Z = 0$, тогда в сечении получаем эллипс $\Pi \cap E \equiv E_{\Pi}$, с уравнением:

$$\frac{(X-x)^2}{a^2} + \frac{(Y-y)^2}{b^2} = 1, \quad (45)$$

где

$$a = a_1 \sqrt{1 - \frac{z^2}{a_2^2}}; \quad b = a_2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{a_2^2}}. \quad (46)$$

Для записи редуцированной функции распределения (далее она выписывается с точностью до постоянных нормировочных множителей, опуская их), необходимы обратные формулы:

$$a_2 = \sqrt{b^2 + z^2}; \quad a_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}, \quad (47)$$

а также якобиан перехода $(a_1, a_2) \rightarrow (a, b)$. Непосредственный расчет по формулам (47) через матрицу Якоби или с помощью внешних форм приводит к простому результату: $\Delta(a_1, a_2 | a, b) = 1$. Таким образом, выделяя из общего элемента объема промежуточную переменную z , по которой необходимо произвести усреднение, получаем для редуцированной функции распределения следующее выражение:

регуляризации $L \rightarrow \infty$. Интеграл в (48) вычисляется через гипергеометрическую функцию:

$$I(R, s) = \frac{-\pi^{3/2} (2s+1) + 2R^{2s+1} \Gamma(-s) \Gamma(s+3/2) \cos(\pi s) F(-s, -1/2-s, 1/2-s, -R^{-2})}{(2s+1) \cos(\pi s) \Gamma(s+3/2) \Gamma(-s)}. \quad (49)$$

Поскольку слой является протяженным по оси Z , то нужно рассмотреть асимптотику (49) при $R \rightarrow \infty$ – она имеет простой вид:

$$I(R, s) \stackrel{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{2s+1} R^{2s+1}. \quad (50)$$

Подставляя это в (48), получаем после простых преобразований:

$$f_{\Pi}(x, a, b) \sim g(x) \cdot a^{s_1} b^{-s_1} = g(x) \left(\frac{a}{b}\right)^{s_1}.$$

Таким образом, редуция плотности функции распределения (43) эллипсоидов на сечение плоского шлифа переносит плотность распределения центров без изменения, а произведение распределений Фуллера с независимыми параметрами переводит в произведение распределений с противоположными параметрами степени и с прежними значениями параметров $a_0 = a_{10}, b_0 = a_{02}$. Можно сказать, что редуцированная функция плотности зависит только от отношения размеров полуосей. Это обстоятельство можно использовать для экспериментальной проверки справедливости пространственного распределения Фуллера для примесей по исследованию свойств распределения сечений примесей на шлифе.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Кудинов В.В., Бобров Г.В.** Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование. М.: Металлургия, 1992. 432 с.
2. **Газотермическое** напыление / под общей ред. Л.Х. Балдаева. М.: Маркет ДС, 2007. 344 с.
3. **Davis J.R.** Handbook of thermal spray technology. ASM International, 2004. 338 p.
4. **Пузряков А.Ф.** Теоретические основы технологии плазменного напыления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Е. Баумана, 2008. 360 с.
5. **Pinkerton A.J.** Advances in the modeling of laser direct metal deposition // Journal of Laser Applications. 2015. V. 27. S15001. <https://doi.org/10.2351/1.4815992>.
6. **Yu T., Yang L., Zhao Yu., Sun J., Li B.** Experimental research and multi-response multi-parameter optimization of laser cladding Fe313 // Optics and Laser Technology. 2018. V. 108. P. 321–332. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.030>.
7. **Sawant M.S., Jain N.K.** Evaluation of stellite coatings by μ -PTA powder, laser, and PTA deposition processes // Materials and Manufacturing Processes. 2017. V. 33:10. P. 1043–1050. <http://dx.doi.org/10.1080/10426914.2017.1364764>.
8. **Alaluss K., Mayr P.** Additive Manufacturing of Complex Components through 3D Plasma Metal Deposition – A Simulative Approach // Metals. 2019. V. 9. P. 574–693. <https://doi.org/10.3390/met9050574>.
9. **Prozorova M.S., Kovaleva M.G., Arsenko M.Yu.** et al. Microstructure and mechanical properties of alumina powder coatings by a new multi-chamber detonation sprayer // Surface Review and Letters. 2016. V. 23. No. 01. P. 1550088-1–1550088-7. <https://doi.org/10.1142/S0218625X15500882>.

10. **Murphy T., Schade C.T., Zwiren, A.** Using automated image analysis for characterization of additive manufacturing powders // International Journal of Powder Metallurgy. 2018. V. 54. P. 47–59.

11. **Bakas G., Dimitriadis S., Deligiannis S.** et al. A Tool for Rapid Analysis Using Image Processing and Artificial Intelligence: Automated Interoperable Characterization Data of Metal Powder for Additive Manufacturing with SEM Case // Metals. 2022. V.12. P. 1816-1–1816-15. <https://doi.org/10.3390/met12111816>.

12. **Соловьев М.Е., Раухваргер А.Б., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И.** Влияние условий плазменного напыления порошка оксида алюминия на пористость и электрическое сопротивление покрытия // Научноёмкие технологии в машиностроении. 2023. № 5 (143). С. 22–32.

13. **Zhu H., Huang Y., Ren J., Zhang B.** et al. Bridging Structural Inhomogeneity to Functionality: Pair Distribution Function Methods for Functional Materials Development // Advanced Science. 2021. V. 17. P. 2003534-1–2003534-31.

14. **Tsitsiashvili G., Osipova M.** Asymptotic Relations in Applied Models of Inhomogeneous Poisson Point Flows // Mathematics. 2023. V.11. P. 1881-1–1881-10. <https://doi.org/10.3390/math11081881>.

15. **Sluzalec A.** Stochastic characteristics of powder metallurgy processing // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39, No 23-24. P. 7303–7308. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.03.013>.

REFERENCES

1. **Kudinov V.V., Bobrov G.V.** Deposition of coatings by spraying. Theory, technology and equipment. Moscow: Metallurgiya, 1992, 432 p.
2. **Gas thermal spraying / under the general editorship of L.H. Baldaev.** Moscow: Market DS, 2007, 344 p.
3. **Davis J.R.** Handbook of thermal spray technology. ASM International, 2004. 338 p.
4. **Puzryakov A.F.** Theoretical foundations of plasma spraying technology. Moscow: Publishing House Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 2008, 360 p.
5. **Pinkerton A.J.** Advances in the modeling of laser direct metal deposition // Journal of Laser Applications. 2015. V. 27. S15001. <https://doi.org/10.2351/1.4815992>
6. **Yu T., Yang L., Zhao Yu., Sun J., Li B.** Experimental research and multi-response multi-parameter optimization of laser cladding Fe313 // Optics and Laser Technology. 2018. V. 108. P. 321–332. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.030>.
7. **Sawant M.S., Jain N.K.** Evaluation of stellite coatings by μ -PTA powder, laser, and PTA deposition processes // Materials and Manufacturing Processes. 2017. V. 33:10. P. 1043–1050. <http://dx.doi.org/10.1080/10426914.2017.1364764>.

8. Alaluss K., Mayr P. Additive Manufacturing of Complex Components through 3D Plasma Metal Deposition – A Simulative Approach // *Metals*. 2019. V. 9. P. 574–693. <https://doi.org/10.3390/met9050574>.

9. Prozorova M.S., Kovaleva M.G., Arsenko M. Yu., et al. Microstructure and mechanical properties of alumina powder coatings by a new multi-chamber detonation sprayer // *Surface Review and Letters*. 2016. V. 23. No. 01. P. 1550088-1–1550088-7. <https://doi.org/10.1142/S0218625X15500882>

10. Murphy T., Schade C.T., Zwiren, A. Using automated image analysis for characterization of additive manufacturing powders // *International Journal of Powder Metallurgy*. 2018. V. 54. P. 47–59.

11. Bakas G., Dimitriadis S., Deligiannis S. et al. A Tool for Rapid Analysis Using Image Processing and Artificial Intelligence: Automated Interoperable Characterization Data of Metal Powder for Additive Manufacturing with SEM Case // *Metals*. 2022. V.12. P. 1816-1–1816-15. <https://doi.org/10.3390/met12111816>

12. Soloviev M.E., Raukhvarger A.B., Baldaev S.L., Baldaev L.H., Mishchenko V.I. Influence of the conditions of plasma spraying of aluminum oxide powder on the porosity and electrical resistance of the coating // *Science-intensive technologies in machine building*, 2023, No. 5 (143), pp. 22–32.

13. Zhu H., Huang Y., Ren J., Zhang B. et al. Bridging Structural Inhomogeneity to Functionality: Pair Distribution Function Methods for Functional Materials Development // *Advanced Science*. 2021. V. 17. P.2003534-1–2003534-31.

14. Tsitsiashvili G., Osipova M. Asymptotic Relations in Applied Models of Inhomogeneous Poisson Point Flows // *Mathematics*. 2023. V.11. P. 1881-1–1881-10. <https://doi.org/10.3390/math11081881>

15. Sluzalec A. Stochastic characteristics of powder metallurgy processing // *Applied Mathematical Modelling*. 2015. V. 39, No 23-24. P. 7303–7308. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.03.013>.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 12.07.2023; одобрена после рецензирования 20.07.2023; принята к публикации 24.07.2023.

The article was submitted 12.07.2023; approved after reviewing 20.07.2023; assepted for publication 24.07.2023.