Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 532.5
doi: 10.30987/2782-5957-2023-2-37-46

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ РАСХОДА ДЛЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Шахла Гаджибала гызы Исмайлова✉
Сумгаитский государственный университет, Сумгаит, Азербайджан
shahla.ismayilova.71@mail.ru

Аннотация

Проведен анализ современного состояния вопроса связанных с течением двухфазных (неоднородных, гетерогенных) жидкостей в гидротехнических и водохозяйственных системах. Целью статьи является разработка уравнений гидродинамики бесступенчатых двухфазных флюидов в соответствии с математическими моделями с учетом внешнего масса-обмена. На основе вопросов, определенных в соответствии с целью статьи, поставлена задача построения математической модели для анализа турбулентного режима вязкой жидкости с непрерывным изменением расхода для гидротехнических систем.

Ключевые слова: гидротехническая система, турбулентный режим, жидкость, двухфазный флюид.

Ссылка для цитирования:
Исмайлова Шахла Гаджибала гызы. Математическое моделирование турбулентного режима вязкой жидкости с непрерывным изменением расхода для гидротехнических систем / Шахла Гаджибала гызы Исмайлова // Транспортное машиностроение. – 2023. - № 02. – С. 37 – 46. doi: 10.30987/2782-5957-2023-2-37-46.

Original article
Open Access Article

MATHEMATICAL MODELING OF TURBULENT VISCOUS LIQUID MODE WITH CONTINUOUS FLOW RATE CHANGE FOR HYDRAULIC SYSTEMS

Shahla Hajibala gizi Ismailova✉
Sumgayit State University, Sumgayit, Azerbaijan
shahla.ismayilova.71@mail.ru

Abstract

The current state of the issue related to the flow of two-phase (heterogeneous) liquids in hydraulic and water management systems is analysed. The paper objective is to develop hydrodynamic equations of infinitely variable two-phase fluids in accordance with mathematical models taking into account external mass exchange. Based on the problems defined in accordance with the paper objective, the task of building a mathematical model to analyze the turbulent mode of viscous fluid with a continuous flow rate change for hydraulic systems is set.

Keywords: hydraulic system, turbulent mode, liquid, two-phase fluid.

Reference for citing:
Ismailova SH. Mathematical modeling of turbulent viscous fluid mode with continuous flow rate change for hydraulic systems. Transport Engineering. 2023; 2:37-46. doi: 10.30987/2782-5957-2023-2-37-46.

Введение

Круг задач, связанных с течением двухфазных (неоднородных, гетерогенных) жидкостей, расход которых постоянно меняется в гидроустановках и технических системах различного назначения, очень широк и в последнее время развивается очень интенсивно [1, 2, 3]. Примерами подобных систем можно рассматривать гидротехнические и водохозяйственные системы, нефтегазовая и химическая промышленность, дорожное строительство, гидроэнергетика, ирригационные и мелиоративные системы, которые зависят от применения гидросферы и техники при решении соответствующих практических вопросов.

В теории двухфазных флюидов вопросы, связанные с процессами, непрерывно присоединяющими (или отделяющими) флюиды извне, мало исследованы [4]. Однако такие вопросы очень часто встречаются в гидротехнике и системах водного хозяйства.

Известно, что изучение гидродинамических процессов, происходящих в одно- и двухфазных жидкостях с непрерывно изменяющимся расходом, представляет собой весьма сложный вопрос, поскольку изменение расхода (массы) по ходу течения является одним из основных факторов, влияющих на движение двухфазной системы [4, 5, 6]. Это необходимо учитывать при теоретическом исследовании двухфазных жидкостей и при решении практических задач. С этой точки зрения актуальным вопросом является вывод уравнений движения двухфазных флюидов, построение математических моделей, и разработка критериев моделирования.

Целью статьи является разработка уравнений гидродинамики бесступенчатых двухфазных флюидов в соответствии с математическими моделями с учетом внешнего масса-обмена. В соответствии с целью статьи рассматриваются нижеследующие вопросы:

- построение обобщенных уравнений движения двухфазных жидкостей с учетом внешнего и внутреннего масса-обмена;

- разработка математической модели течения жидкости с плавно изменяющимся расходом и критериями подобия;

- определение зависимости для отчетности плавно-переменного расхода в гидроустановках.

Постановка и решение задачи. Как известно из [7], течение жидкости в гидравлических установках, в нефте-, газо- и водо- масса-обменных коллекторах и других системах могут быть ламинарным и турбулентным. При ламинарном режиме течения жидкость движется упорядоченно слоями. В этом режиме течения траектории частиц, составляющих жидкость, параллельны друг другу и не пересекаются. В турбулентном течении частицы, из которых состоит жидкость, движутся неравномерно, их траектории пересекаются, смешиваются друг с другом и принимают сложную форму. Скорость, давление и т. д. частиц жидкости в этом регулярном потоке пульсирует.

Режим движения жидкости зависит от многих факторов, важнейший из которых зависит от соотношения между силой инерции и силой вязкости и выражается критерием Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \upsilon d p / \mu = \upsilon d / \nu ,$$

где υ – средняя скорость течения жидкости; d – диаметр трубы; ρ – плотность жидкости; ν, μ – кинематическая и динамическая вязкости жидкости.

В результате теоретических и экспериментальных исследований установлено, что режимы течения жидкости зависят от значения Re. Таким образом, когда число Рейнольдса Re меньше критического значения течения жидкости $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, течение устойчиво и жидкость движется в ламинарном режиме. В результате скорость и напор потока жидкости становятся регулярными. С увеличением скорости потока жидкости Re также увеличивается, и когда $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, гидродинамические параметры потока сопровождаются пульсациями (пульсацией, вибрацией) в результате того, что частицы потока жидкости подвергаются резкому перемешиванию жидких частиц в турбулентном потоке.

Мгновенная локальная скорость c и давление P частицы жидкости определяется на основе метода осреднения по времени Рейнольдса [8]:

$$c = \bar{c} + c' \quad (1)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (2)$$

где $\bar{c}$, $\bar{P}$, – осредненное значение местной скорости и давления (или средней локальной скорости и давления); c', P' – локальная скорость и пульсация давления.

Среднее значение мгновенной локальной скорости и давления, соответствующее интервалу времени – t_0, можно определить как

$$\bar{c} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} c dt, \tag{3}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} P dt\ . \tag{4}$$

Мгновенная локальная скорость и пульсация давления равны нулю в рассматриваемом интервале времени – t_0, т.е.

$$\bar{c}' = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} c' dt = 0, \tag{5}$$

$$\overline{P}' = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} P' dt = 0. \tag{6}$$

Таким образом, вместо мгновенной локальной скорости c и давления P в турбулентном течении жидкости берутся осредненные локальная скорость $\bar{c}$ и осредненное давление $\overline{P}$.

Следует отметить, что $\overline{c'_x c'_x} \neq 0$, $\overline{c'_y c'_y} \neq 0$, $\overline{c'_z c'_z} \neq 0$ и $\overline{c'_x c'_y} \neq 0$, $\overline{c'_y c'_z} \neq 0$

Тогда

$$\bar{c}_i'^2 = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} c'^2 dt \neq 0, \tag{7}$$

$$\overline{c_i' c_j'} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} c_i' c_j' dt \neq 0. \tag{8}$$

Выведем уравнения турбулентного режима течения жидкости с непрерывно меняющимся расходом, используя упомянутый выше метод осреднения по времени. Для этого запишем систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (здесь предполагается, что скорость течения жидкости много меньше скорости звука), поэтому $\rho = const$ и $\nu = const$ следующим образом:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = q, \tag{9}$$

– уравнения динамики

$$\frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x\frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y\frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z\frac{\partial c_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \left(c_{*x} - c_x\right)q + \nu\Delta c_x, \tag{10}$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x\frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y\frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z\frac{\partial c_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \left(c_{*y} - c_y\right)q + \nu\Delta c_y, \tag{11}$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x\frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y\frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z\frac{\partial c_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \left(c_{*z} - c_z\right)q + \nu\Delta c_z, \tag{12}$$

– уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c_x\frac{\partial T}{\partial x} + c_y\frac{\partial T}{\partial y} + c_z\frac{\partial T}{\partial z} = a\Delta T + \left(T_* - T\right)q\ . \tag{13}$$

Здесь c_x, c_y, c_z – компоненты вектора мгновенной локальной скорости движущейся жидкости; q – удельная масса от движущейся жидкости; ρ, ν – плотность жидкости и коэффициент кинематической жесткости, $\nu = \mu/\rho$; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; a – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; c_v-коэффициент изохорной теплоемкости (в несжимаемых средах $c_v = c_p$); T, T_* – основная часть жидкости и связанная с ней (или отделенная от него) часть температуры потока; Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Из уравнений (9)-(13) как частный случай получаются существующие уравнения гидротермодинамики:

– уравнение неразрывности, когда $q = 0$

$$\frac{\partial c_x}{\partial x}+\frac{\partial c_y}{\partial y}+\frac{\partial c_z}{\partial z}=0 \qquad (14)$$

в случае $q(c_*-c)=0$ уравнений динамики – уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial c_x}{\partial t}+c_x\frac{\partial c_x}{\partial x}+c_y\frac{\partial c_x}{\partial y}+c_z\frac{\partial c_x}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\Delta c_x;$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial t}+c_x\frac{\partial c_y}{\partial x}+c_y\frac{\partial c_y}{\partial y}+c_z\frac{\partial c_y}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\Delta c_y; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t}+c_x\frac{\partial c_z}{\partial x}+c_y\frac{\partial c_z}{\partial y}+c_z\frac{\partial c_z}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\Delta c_z,$$

когда $q(T_*-T)=0$ уравнение энергии представляет собой уравнение Фурье-Кирхгофа

$$\frac{\partial T}{\partial t}+c_x\frac{\partial T}{\partial x}+c_y\frac{\partial T}{\partial y}+c_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\Delta T, a=\lambda/\rho c\ . \qquad (16)$$

Физические величины, входящие в систему уравнений движения (9)-(13) вязкой несжимаемой жидкости c_x, c_y, c_z, ρ, T, обозначают мгновенную локальную скорость, давление и температуру в наблюдаемой точке пространства. Значения величин, входящих в уравнения (9)-(13), следует заменить суммой средних и пульсаций при турбулентном течении жидкости. Тогда для турбулентного режима течения жидкости необходимо применить операцию осреднения по времени во всех пределах, входящих в уравнения разрыва (9), динамики (10)-(12) и энергии (13).

Если провести операцию усреднения в уравнении неразрывности (9), то получим

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=\bar{q} \qquad (17)$$

или

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=\bar{q}. \qquad (18)$$

При турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости уравнение неразрывности не меняет своего вида.

Усредним систему уравнений динамики (10)-(12). Для этого, если в первом (проекция на ось x) уравнении динамических уравнений (10) произвести преобразования с учетом уравнения неразрывности (9), применим операцию усреднения по времени к каждому предел полученного уравнения. В результате мы получим

$$\overline{\frac{\partial u_x}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u_xu_x)}+\overline{\frac{\partial}{\partial y}(u_xu_y)}+\overline{\frac{\partial}{\partial z}(u_xu_z)}=\overline{F_x}+\overline{u_{*x}q}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\nu\left(\overline{\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}}\right). \qquad (19)$$

Если вместо мгновенных локальных величин в это уравнение записать сумму усреднения и пульсации, то получим, $\overline{\frac{\partial u_x}{\partial t}}=\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}_x+u_x'\right)}=\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}$, где $\bar{u}_x'$ – среднее по времени значение, равное нулю, т.е. $\bar{u}_x'=0$. Таким образом,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u_xu_x)}=\overline{\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x+u_x'\right)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}_x^2+2u_xu_x'+\left(u_x'\right)^2\right]=\frac{\partial \bar{u}_x^2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u_x'}\right)^2,$$

где, $\frac{\partial}{\partial x}\left(2\bar{u}_xu_x'\right)=0$, потому что $\bar{u}_x'=0$.

Аналогично усредним остальные слагаемые, входящие в уравнение (19),

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y}(u_xu_y)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_x\bar{u}_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(\bar{u}_xu_y'\right)}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(u_x'\bar{u}_y\right)}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(u_x'u_y'\right)},$$

сюда включены $\frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(\bar{u}_xu_y'\right)}=0$ и $\frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(u_x'\bar{u}_y\right)}=0$ потому что $\overline{u_x'}=0, \overline{u_y'}=0$.

В результате получим

$$\overline{\frac{\partial u_x}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial t};\ \overline{\frac{\partial u_y}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial t};\ \overline{\frac{\partial u_z}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial t};$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x)} = \frac{\partial \bar{u}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_x^{'}}^2}{\partial x};$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y)} = \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}_x \bar{u}_y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u_x^{'} u_y^{'}}\right);$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z)} = \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}_x \bar{u}_z) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u_x^{'} u_z^{'}}\right);$$

$$\overline{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\overline{\overline{u_x} + u_x^{'}}\right) = \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u_x^{'}}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial x^2},$$

потому что, $\overline{u_x^{'}} = 0$

$$\overline{\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial y^2};\ \overline{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}} = \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial z^2};\ \overline{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x};\ \overline{\frac{\partial P}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y};\ \overline{\frac{\partial P}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial z};$$

$$\nu\overline{\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)} = \nu\left(\frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u_x}}{\partial z^2}\right) = \nu\Delta\overline{u_x}.$$

Учитывая эти утверждения в уравнении (19), мы пишем

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_x \bar{u}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_x \bar{u}_z\right) = \overline{F_x} + \bar{u}_{*x}\bar{q} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + \nu\Delta\bar{u}_x -$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u_x^{'} u_x^{'}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u_x^{'} u_y^{'}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u_x^{'} u_y^{'}}\right)\right] \quad (20)$$

Если произвести аналогичные преобразования (11) и (12) в уравнениях динамики, то для турбулентного режима течения вязкой несжимаемой жидкости запишем

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x \bar{u}_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_y \bar{u}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_z \bar{u}_y\right) = \overline{F}_y + \bar{u}_{*y}\bar{q} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \nu\Delta\bar{u}_y -$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\overline{\left(u_x^{'} u_y^{'}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(u_y^{'} u_y^{'}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(u_z^{'} u_y^{'}\right)}\right]; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x \bar{u}_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_y \bar{u}_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_z \bar{u}_z\right) = \overline{F}_z + \bar{u}_{*z}\bar{q} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \nu\Delta\bar{u}_z -$$
$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\overline{\left(u_x^{'} u_z^{'}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\left(u_y^{'} u_z^{'}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(u_z^{'} u_z^{'}\right)}\right]. \quad (22)$$

Если в уравнениях динамики (20)-(22) произвести следующие преобразования

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_x \bar{u}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_x \bar{u}_z\right) = 2\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} +$$
$$+\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} +$$
$$+\bar{u}_x\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \bar{u}_x \bar{q};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x\bar{u}_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_y\bar{u}_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_z\bar{u}_y\right)=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+2\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+$$

$$+\bar{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\bar{u}_y+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z}+$$

$$+\bar{u}_y\left(\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z}+\bar{u}_y\bar{q};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x\bar{u}_z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{u}_y\bar{u}_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{u}_z\bar{u}_z\right)=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y}+$$

$$+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+2\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}+$$

$$+\bar{u}_z\left(\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)=\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}+\bar{u}_z\bar{q}.$$

Систему уравнений турбулентного режима течения вязкой несжимаемой жидкости можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}=\bar{q};$$

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z}\right)=\rho\left[\bar{F}_x+\left(\bar{u}_{*x}-\bar{u}_x\right)\bar{q}\right]-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\rho\overline{u'_xu'_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial y}-\rho\overline{u'_xu'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z}-\rho\overline{u'_xu'_z}\right);$$

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z}\right)=\rho\left[\bar{F}_y+\left(\bar{u}_{*y}-\bar{u}_y\right)\bar{q}\right]-\frac{\partial\bar{P}}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\rho\overline{u'_xu'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}-\rho\overline{u'_yu'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z}-\rho\overline{u'_zu'_y}\right); \tag{23}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)=\rho\left[\bar{F}_z+\left(\bar{u}_{*z}-\bar{u}_z\right)\bar{q}\right]-\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\rho\overline{u'_xu'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial y}-\rho\overline{u'_yu'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z}-\rho\overline{u'_zu'_z}\right).$$

Запишем эту систему уравнений в тензорной форме

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i}=\bar{q}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\right)=\rho\left[\bar{F}_i+\left(\bar{u}_{*i}-\bar{u}_i\right)\bar{q}\right]-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u'_iu'_j}\right). \tag{24}$$

Анализ уравнений (23) или (24) показывает, что эти системы уравнений являются общей, поскольку в результате тех или иных упрощений уравнения гидромеханики для турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости приобретают частный случай. Если в системе уравнений (23) или (24) не учитывать интенсивность смешивания (или отделения) массы от жидкости $\bar{q}=0$ и ее импульс

$\left(\bar{u}_{*i}-\bar{u}_i\right)\bar{q}=0$, то выбираем уравнение Рейнольдса для турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости как частный случай [9]

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x}=0;$$
$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial i}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)=\rho\bar{F}_i-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}\right). \tag{25}$$

Таким образом, систему уравнений (23) или (24) можно назвать обобщенными уравнениями Рейнольдса турбулентного режима течения вязкой несжимаемой жидкости с непрерывно изменяющимся расходом (массой). Пределы, входящие в динамические уравнения системы (23) и (24) в результате осреднения во времени турбулентного течения

$$\tau_{Tij}=-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}} \tag{26}$$

где $\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$ – тензор турбулентных напряжений.

При этом турбулентные напряжения обладают свойством симметрии $\tau_{Tij}=\tau_{Tji}$. С учетом выражения (26) тензор полных напряжений, возникающих при турбулентном режиме течения вязкой несжимаемой жидкости имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij}=-\bar{P}\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}, \tag{27}$$

или

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}-\bar{P}+\mu\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}-\rho\overline{u_i^{'}u_i^{'}}, i=j\\ \mu\left(\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}, i\neq j\end{cases}. \tag{28}$$

Запишем эти выражения в координатной форме

$$\sigma_{xx}=-\bar{P}+2\mu\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}-\rho\overline{u_x^{'2}};\qquad \sigma_{yy}=-\bar{P}+2\mu\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}-\rho\overline{u_y^{'2}};$$
$$\sigma_{zz}=-\bar{P}+2\mu\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}-\rho\overline{u_z^{'2}};\qquad \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}\right)-\rho\overline{u_x^{'}u_y^{'}}; \tag{29}$$
$$\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)-\rho\overline{u_x^{'}u_z^{'}};\qquad \sigma_{yz}=\sigma_{zy}=\mu\left(\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\right)-\rho\overline{u_y^{'}u_z^{'}}.$$

Здесь тремя компонентами $\rho\overline{u_x^{'2}},\rho\overline{u_y^{'2}},\rho\overline{u_z^{'2}}$ являются нормальные и $\rho\overline{u_x^{'}u_z^{'}}=\rho\overline{u_z^{'}u_x^{'}}$, $\rho\overline{u_x^{'}u_y^{'}}=\rho\overline{u_y^{'}u_x^{'}}$, $\rho\overline{u_y^{'}u_z^{'}}=\rho\overline{u_z^{'}u_y^{'}}$ касательные турбулентные напряжения. Выражения (27)-(29) показывают, что полное касательное напряжение τ, создаваемое при турбулентном режиме течения вязкой жидкости τ_μ, равно сумме касательных напряжений τ_T, создаваемых вязкостью, и напряжений, создаваемых турбулентностью:

$$\tau_{ij}=\tau_\mu+\tau_T=\mu\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)+\rho_i\overline{u_i^{'}u_j^{'}}. \tag{30}$$

При турбулентном течении вязкой жидкости, кроме скорости и давления, пульсирует и ее температура, т. е. $T=\bar{T}+T^{'}$, где $\bar{T}$ – средняя локальная температура жидкости, $T^{'}$ – местная пульсация температуры,

$$\overline{T} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} T dt \qquad (31)$$

при этом локальная пульсация

$$\overline{T^{'}} = \int_t^{t+t_0} T^{'} dt = 0. \qquad (32)$$

С учетом этого, если усреднить по времени на каждом пределе уравнения энергии течения вязкой несжимаемой жидкости (13) с непрерывно меняющимся потоком, можно записать

$$\begin{gathered}\rho c\left[\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}_x\overline{T}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u}_y\overline{T}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u}_z\overline{T}\right)\right]= \\ =\lambda\Delta T-\rho c_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u_x^{'}T^{'}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u_y^{'}T^{'}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u_z^{'}T^{'}}\right)\right]+\rho c_V\overline{T}\cdot\overline{q}.\end{gathered} \qquad (33)$$

Если сравнить это уравнение с уравнением энергии ламинарного течения жидкости, то можно увидеть, что при турбулентном течении $\overline{u_x^{'}T^{'}}, \overline{u_y^{'}T^{'}}$ и $\overline{u_z^{'}T^{'}}$. Их называют турбулентными напряжениями, возникающими при теплопереносе [4,8].

(33) в уравнении энергии с учетом усредненного уравнения неразрывности (17) запишем

$$\begin{gathered}\rho c_V\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+\overline{u}_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}+\overline{u}_y\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}+\overline{u}_z\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}-\rho c_V\overline{u_x^{'}T^{'}}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}-\rho c_V\overline{u_y^{'}T^{'}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}-\rho c_V\overline{u_z^{'}T^{'}}\right)+\rho c_V\left(\overline{T}_*-\overline{T}\right)\overline{q}\ .\end{gathered} \qquad (34)$$

Это уравнение можно записать в компактной форме следующим образом с учетом повторяющихся индексов.

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}-\rho c_V\overline{u_j^{'}T^{'}}\right)+\rho c_V\left(\overline{T}_*-\overline{T}\right)\overline{q}\ . \qquad (35)$$

Таким образом, с учетом изменения внешней теплоты и массы получаем систему гидродинамических уравнений турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости [6]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_i}=\overline{q}; \\ \rho\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right)=\rho\left[\overline{F}_i+\left(\overline{u}_{*i}-\overline{u}_i\right)\overline{q}\right]-\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}\right); \\ \rho c_V\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}-\rho c_V\overline{u_j^{'}T^{'}}\right)+\rho c_V\left(\overline{T}_*-\overline{T}\right)\overline{q}.\end{gathered} \qquad (36)$$

Эти уравнения представляют собой дополнительные напряжения (напряжения Рейнольдса), $-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$ и $-\rho c_V\overline{u_j^{'}T^{'}}$, которых генерируются в турбулентном течении. Турбулентные напряжения определяются согласно гипотезе Буссинеска [9, 10]:

$$-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}=\mu_T\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}; \qquad (37)$$

$$-\rho c_V\overline{u_j^{'}T^{'}}=\lambda_T\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}, \qquad (38)$$

где μ_T, λ_T – с учетом выражений (37) и (38) турбулентной вязкости и коэффициента теплопроводности, в системе уравнений (36) запишем

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \bar{q};$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = \rho\left[\bar{F}_i + \left(\bar{u}_{*i} - \bar{u}_i\right)\bar{q}\right] - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right); \tag{39}$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_V \overline{u_j' T'}\right) + \rho c_V\left(\bar{T}_* - \bar{T}\right)\bar{q}.$$

В последнем уравнении системы (39) определим λ и λ_T и как

$$\lambda_T = \frac{\mu_T c_V}{P_{rT}} \quad ; \quad \lambda = \frac{\mu c_V}{P_r}, \tag{40}$$

где Pr_T – турбулентное число Прандтля, принято $P_T = P_{rT} = 1$ в результате существующих исследований.

Тогда система уравнений (39) будет иметь вид

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \bar{q};$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = \left[\rho\bar{F}_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu + \mu_T)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right] + \rho\left(\bar{u}_{*i} - \bar{u}_i\right)\bar{q}; \tag{41}$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_T)c_V \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right] + \rho c_V\left(\bar{T}_* - \bar{T}\right)\bar{q}.$$

Коэффициент μ, входящий в систему уравнений (41), зависит от физико-механических свойств жидкости, а μ_T – коэффициент динамической турбулентной вязкости зависит от гидродинамических характеристик потока жидкости. В общем случае $\mu_T \succ\succ \mu$ [11].

Таким образом, уравнения (41) представляют собой математическую модель турбулентного течения вязкой жидкости с плавно изменяющимся расходом. (41) в систему уравнений $q = 0,\ \rho\left(\bar{u}_{*i} - \bar{u}_i\right)\bar{q} = 0$ и $\rho c_V\left(\bar{T}_* - \bar{T}\right)q = 0$ если принять (т.е. в случае, если масса турбулентного потока жидкости постоянна), то получим существующие уравнения турбулентного течения гидродинамики [12]

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = \rho\bar{F}_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_T)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right]; \tag{42}$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_T)c_V \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right].$$

Теоретическая и практическая значимость исследования

Полученные результаты турбулентного течения вязкой жидкости с плавно изменяющимся расходом могут быть использованы для решения практических задач, связанных с течением двухфазных жидкостей. Полученные уравнения и математические модели могут быть применены при анализе, проектировании и составлении отчетов о двухфазном потоке жидкости с плавно изменяющимся потоком в гидравлических установках. Обобщенные отчетные формулы, разработанные с учетом различных зон сопротивления и режимов течения, имеют большое практическое значение при конструировании различных гидротехнических устройств.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика. М., 1972. 648 с.
2. Гринвальд Д.И. Турбулентность русловых потоков. Ленинград, 1974. 166 с.
3. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика, М.,Энергоатомиздат, 1984. 384 с.
4. Далейе Дж., Гио М., Ритмюллер М. Теплообмен и гидродинамика двухфазных потоков в атомной и тепловой энергетике. Перевод с англ. под ред. П.Л.Кириллова. М., Энергоатомиздат, 1984, 422 с.
5. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М., Машиностроение, 1978. 463 с.
6. Исмайлов Р.Ш., Гахраманов П.Ф., Исмайлова Ш.Г. Джафаров Ш.Т., Гурбанов А.А. Феноменологическая теория турбулентного движения несжимаемой среды с тепломассообменом. Сумгаитский Государственный Университет, Научные новости, том 10, № 2, Сумгаит, 2010. с. 26-32.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
8. Блов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбуле нтных течений: Учебное пособие / Балт. гос. тех н. ун-т. СПб., 2001. 108 с.
9. Монин А.С., Яглом А.М., Статистическая гидромеханика. Часть I, М.: Наука, 1965. 639 с.
10. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л., Машиностроение, 1976. 504 с.
11. Рабинович Е.З. Гидравлика. М., 1980. 278 с.
12. Рейнольдс А Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. Пер. с англ. М., энергия, 1979. 408с.

REFERENCES

1. Bogomolov AI, Mikhailov KA. Hydraulics. Moscow; 1972.
2. Greenwald DI. Turbulence of channel flows. Leningrad; 1974.
3. Deich ME, Zaryankin AE. Hydro and gas dynamics, Moscow: Energoatomizdat; 1984.
4. Daleye J, Gio M, Ritmuller M. Heat transfer and hydrodynamics of two-phase flows in nuclear and thermal power engineering. Moscow: Energoatomizdat; 1984.
5. Yemtsev BT. Technical hydromechanics. Moscow: Mashinostroenie; 1978.
6. Ismailov RSh, Gakhramanov PF, Ismailova ShG, Jafarov ShT, Gurbanov AA. Phenomenological theory of turbulent motion of an incompressible medium with heat and mass transfer. Sumgayit: Sumgayit State University, Scientific News. 2010;10(2):26-32.
7. Landau LD, Lifshits E M. Hydrodynamics. Moascow: Nauka; 1986.
8. Belov IA, Isaev SA. Modeling of turbulent flows: textbook. St. Petersburg: Baltic State Technical University; 2001.
9. Monin AS, Yaglom AM. Statistical hydromechanics: part I. Moscow: Nauka; 1965.
10. Povkh IL. Technical hydromechanics. Leningrad: Mashinostroenie; 1976.
11. Rabinovich EZ. Hydraulics. Moscow; 1980.
12. Reynolds AJ. Turbulent flows in engineering applications. Moscow: Energiya; 1979.

Сведения об авторе:

Шахла Гаджибала гызы Исмайлова, Сумгаитский государственный университет, г. Сумгаит, Азербайджан.

Shahla Hajibala gizi Ismailova, Sumgayit State University, Sumgayit, Azerbaijan.

Статья опубликована в режиме Open Access.
Article published in Open Access mode.

Статья поступила в редакцию 20.11.2022; одобрена после рецензирования 11.01.2023; принята к публикации 25.01.2023. Рецензент – Хандожко А.В., доктор технических наук, профессор кафедры «Металлорежущие станки и инструменты» Брянского государственного технического университета, главный редактор журнала «Транспортное машиностроение».

The article was submitted to the editorial office on 20.11.2022; approved after review on 11.01.2023; accepted for publication on 25.01.2023. The reviewer is Khandozhko A.V., Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Metal Cutting Machines and Tools at Bryansk State Technical University, Editor-in-Chief of the journal *Transport Engineering.*