

Машиностроение Mechanical engineering

Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 621.833.61
doi: 10.30987/2782-5957-2022-4-4-16

ПОСТРОЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

Владимир Михайлович Третьяков ✉

Ковровская государственная технологическая академия им. В.А. Дегтярева, Владимирская обл., г. Ковров, Россия.
treykov.kovrov@list.ru

Аннотация

Цель исследования - показать возможности матричного подхода при решении задач анализа структурных свойств и создания рациональных конструкций механизмов.

Задача, решению которой посвящена статья, - определение структурных характеристик планетарных механизмов с одним внешним и одним внутренним зацеплением и улучшение их конструкций.

Методы исследования. В работе использован матричный метод анализа структурных свойств механизма и модификации его устройства, который основан на описании подвижностей кинематических пар, звеньев, кинематических цепей, механизмов с помощью матриц подвижностей и использовании матричных уравнений.

Новизна работы. Предложены матричные уравнения, позволяющие последовательно проводить структурный анализ независимых замкнутых контуров сложных механизмов. В отличие от алгебраического метода с помощью матричного под-

хода можно не только найти местные и общие подвижности, определить число избыточных связей, но и установить каких именно подвижностей не хватает.

Результаты исследования. Проведенный анализ показал, что рассматриваемые планетарные механизмы имеют избыточные связи и подвижности в зубчатых зацеплениях, приводящие к точечному контакту зубьев и неравномерности распределения нагрузки по сателлитам. Разработаны предложения по устранению выявленных в механизмах избыточных связей.

Выводы. Проведенное на примере планетарных механизмов исследование показывает, что матричный метод структурного анализа - эффективное средство выявления избыточных связей и инструмент, упрощающий поиск технических решений для их устранения.

Ключевые слова: кинематические пары, избыточные связи, метод, матрицы, подвижность, механизм.

Ссылка для цитирования:

Третьяков В.М. Построение рациональных планетарных механизмов на основе матричного метода структурного анализа / В. М. Третьяков // Транспортное машиностроение. – 2022. - № 4. – С. 4–16. doi: 10.30987/2782-5957-2022-4-4-16.

Original article
Open Access Article

CONSTRUCTION OF EFFICIENT PLANETARY GEARS BASED ON THE MATRIX METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS

Vladimir Mikhailovich Tretyakov ✉

Kovrov State Technological Academy named after V.A. Degtyarev, Vladimir region, Kovrov, Russia.
treykov.kovrov@list.ru

Abstract

The study objective is to show the possibilities of the matrix approach in solving problems of analyzing structural properties and developing efficient structures of mechanisms.

The task to which the paper is devoted is to define the structural characteristics of planetary gears with one external and one internal engagement and to improve their structures.

Research methods. The paper uses a matrix method for analyzing the structural properties of the mechanism and modifying its structure, which is based on describing the mobility of kinematic pairs, links, kinematic chains, mechanisms using mobility matrices and the use of matrix equations.

The novelty of the work. Matrix equations are proposed that make it possible to conduct a structural analysis of independent closed circuits of complex mechanisms consistently. In contrast to the algebraic method, using a matrix approach, it is possible not only to find local and general mobility, determine the number of redundant connections, but also to find which mobility is missing.

Reference for citing:

Tretyakov VM. Construction of efficient planetary gears based on the matrix method of structural analysis. *Transport Engineering*. – 2022. – 4 -16. doi: 10.30987/2782-5957-2022-4-4-16.

Введение

Наличие избыточных связей в изделиях машиностроения приводит к проблемам при изготовлении и эксплуатации. В реальных конструкциях избыточные связи встречаются часто, поэтому в механике большое внимание уделяется вопросу их выявления и устранения. Задача разработки механизмов без избыточных связей и подходы к ее решению были озвучены профессором Л.Н. Решетовым [1] более пятидесяти лет назад. Исчерпывающе данная задача до сих пор не решена [2].

Материалы, модели, эксперименты и методы

Матричное уравнение, предложенное в [4, 5], для определения структурных свойств (подвижностей и избыточных свя-

$$WQ_m = W_{m-1} + W_{M(m-1)}^u + H_{\Sigma m} - W_{Mm}^u - W_{Mm} - F, \quad (1)$$

где WQ_m – матрица структурных свойств кинематической цепи, полученной формированием m -го замкнутого контура, она содержит описание подвижностей всего механизма, возникающего при замыкании всех контуров начиная с первого, включая и контур с номером m , и избыточных связей в контуре под номером m ; W_{m-1} – матрица общих подвижностей начального механизма, входящего в замкнутый контур под номером m , которая содержит подвижности всего начального механизма, полученного замыканием всех контуров начиная с первого, включая и контур с номером $(m - 1)$; $H_{\Sigma m} = \sum_{i=1}^{p^m} H_i$ – суммарная матрица подвижностей в кинематических парах, образованных вновь введен-

Study results. The analysis showed that the planetary gears under consideration have redundant connections and mobility in the gears, leading to point contact of the teeth and uneven load distribution in planetary pinions. Proposals have been developed to eliminate redundant connections identified in the mechanisms.

Conclusions. The study conducted on the example of planetary gears shows that the matrix method of structural analysis is an effective means of identifying redundant connections and a tool that simplifies the search for technical solutions to eliminate them.

Keywords: kinematic pairs, redundant connections, method, matrices, mobility, gear.

В данной работе показан матричный метод структурного анализа механизмов и создания их модификаций, не имеющих избыточных связей. Используя алгебраические структурные формулы [1] не удается выявить избыточные связи и подвижности в отдельности. Они показывают их разность, а это может привести к ошибкам при поиске и выборе технических решений [3]. Матричный метод используется для исследования многоконтурных планетарных механизмов.

зей) многоконтурных механизмов удобнее представить в виде:

ными звеньями при формировании замкнутого контура под номером m ; $H_i = \begin{vmatrix} t_x & r_x \\ t_y & r_y \\ t_z & r_z \end{vmatrix}$ – матрица подвижностей i -ой кинематической пары, где t_x, t_y, t_z – переменные, равные 1 при наличии поступательных подвижностей (движений) вдоль осей X, Y, Z и 0 в противном случае; r_x, r_y, r_z – переменные, принимающие значение 1 при наличии вращательных подвижностей (движений) вокруг осей X, Y, Z и значение 0 в противном случае; $p^m = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$ – число кинематических пар, образованных вновь введенными звеньями при формировании замкнутого контура под номером m , где p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – число

кинематических пар разных классов; $W_{M(m-1)}^u$ - матрица местных подвижностей в составе начального механизма звена u , к которому будут присоединены звенья, вновь вводимые при формировании m -го замкнутого контура механизма; W_{Mm}^u - матрица местных подвижностей звена u , к которому присоединены звенья, введенные при формировании m -го замкнутого контура механизма; при образовании замкнутого контура таких звеньев может быть два; $W_{Mm} = \sum_{j=1}^{n_m} W_{Mj}$ - суммарная матрица местных подвижностей звеньев, вновь введенных при формировании m -го замкнутого контура механизма; $W_{Mj} = \begin{pmatrix} w_M^{tx} & w_M^{rx} \\ w_M^{ty} & w_M^{ry} \\ w_M^{tz} & w_M^{rz} \end{pmatrix}$ - матрица местных подвижностей j -ого звена, где $w_M^{tx}, w_M^{ty}, w_M^{tz}$ - пере-

менные, принимающие значение 1 при наличии независимых поступательных движений j -го звена вдоль осей X, Y, Z и значение 0 в противном случае; $w_M^{rx}, w_M^{ry}, w_M^{rz}$ - переменные, принимающие значение 1 при наличии независимых вращательных движений j -го звена вокруг осей X, Y, Z и значение 0 в противном случае; n_m - число подвижных звеньев, вновь введенных при формировании m -го замкнутого контура механизма; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица свободного замыкания контура (матрица подвижностей свободного твердого тела); $k = p - n$ - число независимых замкнутых контуров механизма, как разность общего числа его кинематических пар (p) и числа подвижных звеньев (n).

Результаты

Матрицы подвижностей кинематических пар планетарных механизмов

Кинематическая пара вида «цилиндрическое зубчатое зацепление» отнесена Л.Н. Решетовым к линейчатым парам [1, 6]. Ее матрица подвижностей $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

При развороте одного зубчатого колеса относительно другого вокруг общей нормали к касающимся профилям (в выбранной системе координат вокруг оси Y , рис. 1) линия контакта превращается в точку. Такая кинематическая пара первого класса

имеет матрицу подвижностей: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Условимся, что в рассматриваемых планетарных механизмах все зубчатые зацепления являются линейчатыми кинематическими парами, но не второго, а третьего класса $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вращение вокруг оси Y будем считать недопустимым, поскольку оно меняет вид контакта звеньев. Реально данное движение имеет место, так как зубчатое зацепление допускает поступательные подвижности вдоль осей X и Z [5].

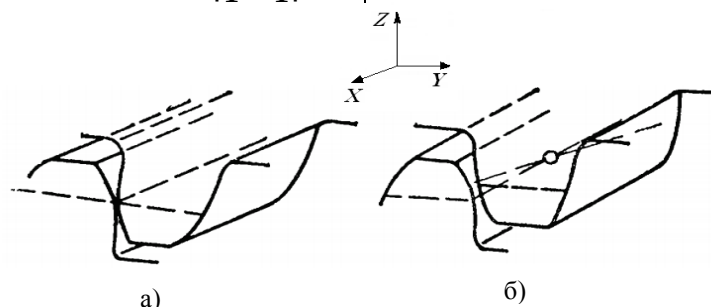


Рис. 1. Зубчатое зацепление: a – как кинематическая пара второго класса, b – вырожденная кинематическая пара первого класса

Fig. 1. Gearing: a – as a kinematic pair of the second class, b – a degenerate kinematic pair of the first class

В принятой системе координат X, Y, Z матрицы подвижностей кинематических пар планетарных механизмов, показанных

на приведенных ниже рисунках, имеют вид:

$$H_A = H_C = H_{B3} = H_{B4} = H_{B5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_{E3} = H_{E4} = H_{D3} = H_{D4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{E5} = H_{D5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение структурных свойств вариантов планетарных механизмов

Для планетарного механизма, приведенного на рис. 2, число кинематических

пар $p = 5$, число подвижных звеньев $n = 3$ и число независимых контуров $k = p - n = 2$.

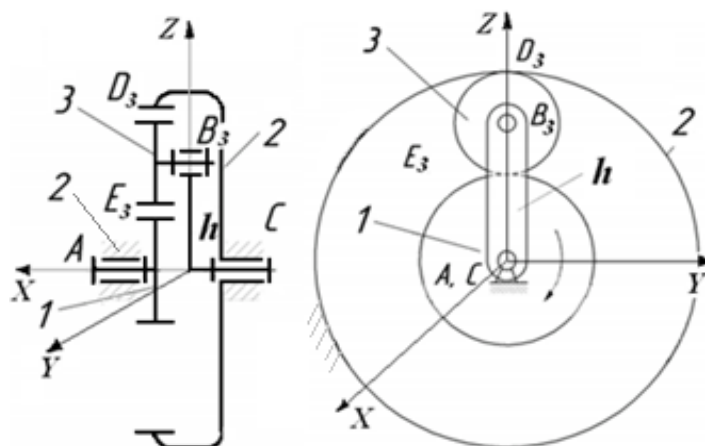


Рис. 2. Трехзвенный планетарный механизм
Fig. 2. Three-link planetary mechanism

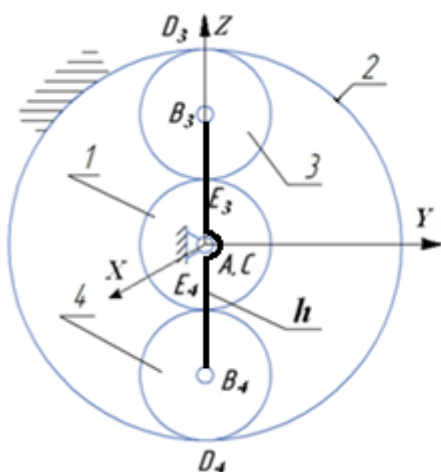


Рис. 3. Четырехзвенный планетарный механизм
Fig. 3. Four-link planetary mechanism

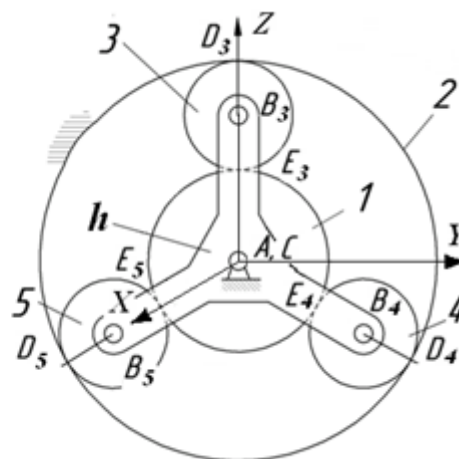


Рис. 4. Пятизвенный планетарный механизм
Fig. 4. Five-link planetary mechanism

Пусть первый ($m = 1$) замкнутый контур образован звеньями (2, 1, 3, 2). Его начальный механизм включает солнечное

колесо 1 и стойку 2, $W_0 = H_A$. Уравнение (1) будет иметь вид:

$$WQ_I = H_A + H_{E3} + H_{D3} - W_{M1} - F. \quad (2)$$

Для звена j (в нашем случае спутник 3) определяем наличие местных подвижностей, используя упрощенный вариант формулы (1) [4]:

$$\begin{aligned} WQ_v^{Mj} &= W_{v-1}^{Mj} + H_v^{Mj} - F, \\ W_{Mj} &= W_v^{Mj}, \end{aligned} \quad (3)$$

где WQ_v^{Mj} – матрица структурных свойств j -ого звена при формировании его кинематическими парами v -го замкнутого контура; по определению местных подвижностей она содержит подвижности звена относительно связанных с ним звеньев, которые считаются неподвижными; максимальное число замкнутых контуров звена на единицу меньше числа образованных им кинематических пар; W_{v-1}^{Mj} – матрица подвижностей j -ого звена при наличии контуров начиная с первого включая кон-

$$\begin{aligned} WQ_1^{M3} &= W_0^{M3} + H_1^{M3} - F = H_{E3} + H_{D3} - F, \\ WQ_1^{M3} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Известно [1], что одной вращательной подвижностью можно заменить одну отсутствующую поступательную подвижность, обозначенную в матрице отрицательным значением соответствующего

$$\begin{vmatrix} t_x & r_x \\ t_y & r_y \\ t_z & r_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} t_x & r_x - r_x^y \\ t_y + r_x^y & r_y \\ t_z & r_z \end{vmatrix},$$

где $r_x^y = 1$ – вращательная подвижность вокруг оси X , используемая для замены отсутствующей поступательной подвижности вдоль оси Y .

В рассматриваемом замкнутом контуре вращательная подвижность звена 3

$$WQ_1^{M3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \text{ Обнулим отрицательные элементы } W_1^{M3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ и}$$

$$W_{M1} = W_{M1}^3 = W_{M3} = W_1^{M3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы местных подвижностей остальных звеньев нулевые. Подставив в уравнение (2) соответствующие матрицы, получим матрицу структурных свойств кинематической цепи, возникшей при замыкании первого контура. В рассматрива-

тур под номером $(v-1)$, при $v=1$ $W_0^{Mj} = H_0^{Mj}$ – матрица подвижностей первой кинематической пары j -ого звена, с которой начинается формирование его первого замкнутого контура; H_v^{Mj} – матрица подвижностей кинематической пары, вновь введенной при формировании v -го замкнутого контура j -ого звена; W_v^{Mj} – матрица местных подвижностей j -ого звена, полученная из WQ_v^{Mj} обнулением отрицательных элементов.

Останавливаем солнечное колесо 1 и по формуле (3) для единственного замкнутого контура ($v=1$) звена 3, образованного двумя кинематическими парами E_3 и D_3 , получим:

элемента. Чтобы учесть эту замену необходимо преобразовать суммарную матрицу. Пример выполнения такого преобразования показан ниже [5]:

вокруг оси X позволяет заменить отсутствующую поступательную подвижность вдоль оси Y . Это вращательное движение обеспечивает введение в зацепление спутника 3 с опорным колесом, являющимся частью стойки 2. В результате матрица структурных свойств звена 3 примет вид:

емом замкнутом контуре вращательная подвижность вокруг оси X позволяет заменить отсутствующую поступательную подвижность вдоль оси Y . В результате матрица структурных свойств примет вид:

$$WQ_I = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Она позволяет выявить в рассматриваемой кинематической цепи общие и групповые подвижности (элементы со знаком плюс) и, отдельно, избыточные связи (элементы со знаком минус). Элементы матрицы показывают, какие именно подвижности и избыточные связи имеются в механизме, а не только фиксируют их количество. С учетом местных подвижностей по алгебраической формуле мы установим, что подвижность данной кинематической цепи равна 1.

Механизм, полученный формированием первого замкнутого контура, имеет одну степень свободы (вращение вокруг

$$WQ_I = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Как видим, в итоговой матрице отсутствуют отрицательные элементы, а это означает, что избыточных связей нет. Значит, выявленные избыточные связи первого контура приводят к нарушению характера контакта лишь в одном зацеплении. В нем контакт в точке, в другом зацеплении контакт по линии.

Избыточные связи, возникшие в замкнутом контуре нельзя устранить подвижностями кинематических пар, входящих в другие контуры. Подвижности же контура влияют на структурные свойства кинематических цепей, образованных присоединением вновь вводимых звеньев. Поэтому в отличие от избыточных связей подвижности, имеющиеся в контуре, должны быть учтены на следующих этапах структурного анализа.

Обнулением отрицательных элементов превращаем матрицу (5) структурных свойств замкнутой кинематической цепи в

матрицу ее подвижностей: $W_I = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Аналогично, обнуляя положительные элементы, получаем матрицу избыточных связей первого замкнутого контура механизма:

оси X) и две избыточные связи, вызванные отсутствием вращательных подвижностей вокруг осей Y и Z. Они приводят к неравномерности распределения нагрузки по длине зуба. Пусть в одном из зубчатых зацеплений контакт линейчатый и матрица подвижности этого зацепления

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ а во втором точечный с матрицей:}$$

Местные подвижности звена 3 не изменятся, а в соответствии с (2) получим:

$$Q_I = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Второй замкнутый контур возникает при добавлении водила h. При этом образуются две вращательные кинематические пары C и B₃. Они связывают водило с звеньями 2 и 3. Последнее из них имеет в составе первого контура местные подвижности, которые должны быть учтены при исследовании второго контура. Уравнение (1) для него будет иметь вид:

$$WQ_{II} = W_I + W_{MI}^3 + H_{B3} + H_C - W_{MII}^3 - W_{MII} - F \quad (7)$$

Местные подвижности 3-го звена (u = 3) в составе первого контура приведены в (4), а во втором контуре они отсутствуют. Вновь введенное водило местных подвижностей не имеет. Определяя структурные свойства механизма, полученного замыканием второго контура, опускаем матрицы, содержащие только нулевые элементы. Для компенсации отсутствующей поступательной подвижности вдоль оси Y, можно использовать вращательную подвижность водила вокруг оси X, поэтому:

$$WQ_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем матрицу структурных свойств в матрицу подвижностей трехзвенного механизма $W_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ и матрицу избыточных связей второго контура:

$$Q_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

В соответствии с (6) и (8) планетарный механизм по рис. 2 имеет 4 избыточные связи: $Q_I + Q_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$. Эти связи

приводят к неравномерности нагрузки по длине зуба и во втором зубчатом зацеплении сателлита 3. В нем вместо контакта по линии будет контакт в точке. Пусть в обоих зацеплениях сателлита 3 контакт в точке

ке $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда по (3) $W_{MI} = W_{MI}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ и в соответствии с (2) получим:

$WQ_I = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. Согласно (7) $WQ_{II} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. Избыточные связи исчезли. Это значит, что в механизме по рис. 2 контакт зубьев в зацеплениях происходит по точке, а не по линии. Для исключения кромочного контакта проще всего вы-

полнить зуб сателлита 3 с бочкообразным продольным профилем.

Компенсировать четыре избыточных связи, возникающие при линейчатом контакте зубьев, можно заменой вращательной кинематической пары сателлита 3 на сферическую пару и введением еще одного подвижного звена. Опорное зубчатое колесо нужно связать со стойкой кинематической парой четвертого класса, допускающей только вращательные подвижности вокруг осей Y и Z .

Перейдем к механизму по рис. 3. Рассматриваем его, как механизм по рис. 2 (начальный механизм) с вновь введенным вторым сателлитом 4. Число кинематических пар $p = 8$, число подвижных звеньев $n = 4$ и $k = 4$.

Третий замкнутый контур получается добавлением сателлита 4 (рис. 3) к начальному механизму. Для этого образуются две кинематические пары D_4 и E_4 , которые связывают вновь введенное звено с звеньями 1 и 2 начального механизма, не имеющими местных подвижностей. Легко показать, что вновь введенный сателлит 4 имеет такие же местные подвижности, как и сателлит 3 в первом замкнутом контуре (4):

$W_{MIII} = W_{MIII}^4 = W_{M4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$

Для третьего контура уравнение (1) будет иметь вид:

$$WQ_{III} = W_{II} + H_{D4} + H_{E4} - W_{MIII} - F. \quad (10)$$

Матрица структурных свойств кинематической цепи, полученной замыканием третьего контура, с учетом (9) и замены

отсутствующей поступательной подвижности вращательной, будет иметь вид:

$$WQ_{III} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрицы подвижностей и избыточных связей: $W_{III} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $Q_{III} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Так же, как и для сателлита 3, избыточные связи приводят к тому, что одно из двух зацеплений, образованных введенным сателлитом 4, имеет контакт в точке, а

второе по линии. Всего в образованной тремя контурами кинематической цепи шесть избыточных связей

$$Q_I + Q_{II} + Q_{III} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Четвертый контур замыкаем соединением сателлита 4 с водилом кинематической пары B_4 . При анализе структурных свойств этой кинематической цепи нужно учесть местные подвижности (9) звена 4 в

$$WQ_{IV} = W_{III} + W_{MIII}^4 + H_{B_4} - W_{MIV}^4 - F \quad (11)$$

Заменить вращательной подвижностью вокруг оси X отсутствующую поступательную подвижность вдоль оси Y невозможно. Остановим солнечное зубчатое колесо 1. В этом случае $W_{III} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ и

из (11) получим $WQ_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Замене-

начальном механизме. При замыкании четвертого контура сателлит 4 теряет свои местные подвижности и матрица W_{MIV}^4 содержит только нулевые элементы. Новые звенья не вводятся, поэтому уравнение (1) представим в виде:

нить отсутствующую поступательную подвижность нечем. В предыдущих контурах при остановке солнечного колеса сохраняется вращательная подвижность, которая может быть использована для компенсации отсутствующей поступательной подвижности. С учетом этого для механизма по рис. 3 из (11) получим:

$$WQ_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$W_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Q_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Введение сателлита 4 привело к появлению еще пяти избыточных связей

$Q_{III} + Q_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$. В целом планетарный механизм по рис. 3 имеет в четырех контурах девять избыточных связей:

$$Q_I + Q_{II} + Q_{III} + Q_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Изменение класса кинематической пары B_4 с пятого на третий (сферическая) добавит только две дополнительные подвижности. Поэтому одно из двух зубчатых зацеплений сателлита 4 будет точечным, а не линейчатым. Целесообразно оба сателлита 3 и 4 выполнить с бочкообразным продольным профилем зубьев и использовать

только вращательные кинематические пары.

Перейдем к механизму по рис. 4, полученному в результате присоединения сателлита 5 к начальному механизму, приведенному на рис. 3. Число кинематических пар $p = 11$, число подвижных звеньев $n = 5$ и $k = 6$.

Пятый замкнутый контур образован добавлением сателлита 5, соединенного кинематическими парами E_5 и D_5 с звеньями 1 и 2 начального механизма.

Сателлит 5 в составе пятого контура тоже будет иметь две поступательных местные подвижности. По формуле (3) получим:

$$W_{MV} = W_{MV}^5 = W_{M5} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Матрицы местных подвижностей остальных звеньев нулевые. Для пятого контура уравнение (1) будет иметь вид:

$$H_{D_5} + H_{E_5} - W_{MV} - F. \quad (15)$$

Матрицы подвижностей и избыточных связей кинематической цепи, полученной замыканием пятого контура: $W_V = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $Q_V = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Кинематическая

С учетом местных подвижностей (14), которые сателлит 5 имеет в пятом контуре, и отсутствием у него таковых в шестом, определяем матрицу структурных свойств механизма по рис. 4, которую преобразуем в матрицу его подвижностей $W_{VI} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ и матрицу избыточных связей шестого контура:

$$Q_{VI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Избыточные связи, возникшие при установке сателлита 5, аналогичны избыточным связям сателлита 4. В целом планетарный механизм по рис. 4 имеет в своих замкнутых контурах 14 избыточных связей $Q_I + Q_{II} + Q_{III} + Q_{IV} + Q_V + Q_{VI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -6 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$. Эти избыточные связи будут иметь место при линейчатом контакте во всех его зубчатых зацеплениях. Шесть из найденных избыточных связей являются фиктивными, вызванными отнесением зубчатых зацеплений к третьему классу, а не второму.

Из полученных результатов следует, что для обеспечения линейчатого контакта зубьев в зацеплениях мало устранения избыточных связей. Необходимо ввести еще шесть вращательных подвижностей, дублирующих подвижности, имеющиеся в самом зацеплении и приводящие к нарушению линейчатого контакта зубьев. Действующие на звенья силы будут способствовать линейчатому контакту в зацеплениях за счет введенных дополнительных подвижностей. Примеры таких решений приведены в [1] на рис. 5.13 и рис. 5.14.

Оценим возможность осуществления таких дополнительных изменений для ре-

цепь имеет 11 избыточных связей

$$Q_I + Q_{II} + Q_{III} + Q_{IV} + Q_V = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

В шестом замкнутом контуре сателлит 5 соединен с водилом вращательной кинематической парой. Формула (1) будет иметь вид:

$$WQ_{VI} = W_V + W_{MV}^5 + H_{B5} - W_{MVI}^5 - F. \quad (16)$$

лизации линейчатых контактов во всех зубчатых зацеплениях пятизвенного планетарного механизма с тремя сателлитами. Введение третьего сателлита приводит к появлению дополнительных пяти избыточных связей $Q_V + Q_{VI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$. При

этом только одна кинематическая пара B_5 из трех добавленных может быть изменена с понижением класса. Заменяя ее класс с пятого на третий (сферическая), получим только две дополнительные подвижности. Для исключения четырех избыточных связей, вызванных отсутствием вращательных подвижностей, этого недостаточно. Таким образом, и в пятизвенном планетарном механизме с тремя сателлитами целесообразнее использовать сателлиты с бочкообразным продольным профилем зубьев, сохранить вращательные опоры подвижных звеньев и не усложнять конструкцию неподвижного опорного колеса, вводя две вращательные подвижности.

Устранение избыточных связей в планетарных механизмах. В качестве первого шага по устранению избыточных связей планетарного механизма по рис. 4 предположим, что зубья всех трех сателлитов имеют бочкообразный продольный профиль и все зубчатые зацепления являются кинематическими парами первого класса с матрицами подвижностей: $H_{E3} = H_{E4} = H_{D3} = H_{D4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $H_{E5} = H_{D5} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Воспользовавшись уравнениями (2), (7), (10), (11), (15) и (16) можно убедиться, что избыточные связи в замкнутых контурах механизмов, вызванные отсутствием

вращательных подвижностей, исчезли, а сохранились лишь две из них, связанные с отсутствием поступательных подвижностей. Одна в четвертом контуре (см. (13)):

$$Q_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

вторая в шестом (см. (17)) $Q_{VI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Они возникают при соединении сателлитов 4 и 5 с водилом. Достаточно найти решение, позволяющее ввести поступательную подвижность, для сателлита 4 в четвертом замкнутом контуре механизмов по рис. 3 и рис. 4. Оно может быть использовано и для сателлита 5.

Решаем задачу для сателлита 4. Принимаем, что в четвертом контуре нет из-

быточной связи, вызванной отсутствием поступательной подвижности вдоль оси Y . Тогда матрица структурных свойств механизма по рис. 3 (см. (12)) должна иметь

$$\text{вид } WQ_{IV} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Найдем требуемые}$$

подвижности кинематической пары B_4 преобразовав уравнение (11) и учитывая, что матрица W_{MIV}^4 содержит только нулевые элементы, а в соответствии с (3) аналогичная матрица в третьем контуре не

$$\text{нулевая } W_{MIII}^4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}:$$

$$H_{B_4} = WQ_{IV} + F - W_{III} - W_{MIII}^4.$$

Требуемая матрица подвижности:

$$H_{B_4} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Поступательные подвижности могут быть заменены вращательными. Эта замена используется для преобразования итоговой матрицы в выражении (19). Из нее

получим два возможных варианта матрицы подвижностей кинематической пары B_4 :

$$H_{B_4} = \begin{vmatrix} 0 & \uparrow & \uparrow 1 \\ 1 & \leftarrow & 0 \\ 0 & \downarrow & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}. \quad (20)$$

Дополнительное вращательное движение сателлита 4 должно обеспечивать перемещение его центра вдоль оси Y (18). Для этого ось дополнительного вращения не должна проходить через центр сателлита. Наиболее просто подвижности, требуемые в соответствии с (20), реализуются рычагом 6, связанным вращательными кинематическими парами B_4' и B_4'' с водилом и пассивным сателлитом 4 [7] (рис. 6). В

[7] сателлит 3, непосредственно связанный с водилом, называется основным.

Таким образом, согласно (20) возможны два варианта конструкции, причем вращательная кинематическая пара B_4'' должна допускать вращение сателлита 4 вокруг оси X . В свою очередь, пара B_4' может допускать вращения вокруг оси параллельной оси X или оси Z :

$$H_{B_4'} + H_{B_4''} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ и } H_{B_4'} + H_{B_4''} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

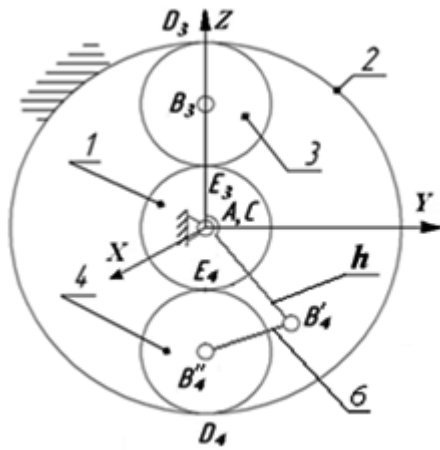


Рис. 6. Реализация дополнительной вращательной подвижности с помощью рычага 6
 Fig. 6. Realization of additional mobility by means of a lever 6

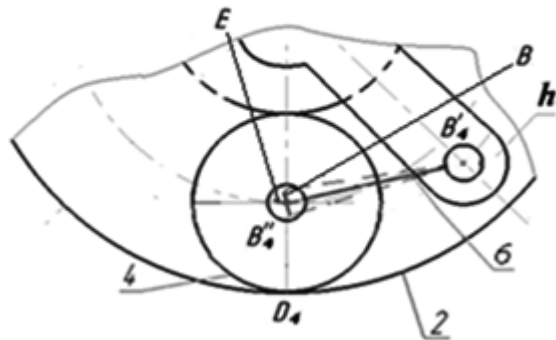


Рис. 7. Полученная B и требуемая E траектории перемещения центра сателлита 4
 Fig. 7. The obtained B and required E trajectory of the satellite 4 center movement

Для выравнивания нагрузки самоустановка пассивных сателлитов должна происходить в процессе их естественного движения, определяемого кинематикой планетарного механизма. Для сателлита 4 этим движением является вращение его вокруг полюса зацепления с опорным колесом 2. Будем считать, что обозначение кинематической пары D_4 определяет и полюс зацепления. При этом сам полюс D_4 перемещается по начальной окружности опорного зубчатого колеса 2. Эти два движения приводят к перемещению центра сателлита по окружности, центр которой расположен на основной оси планетарной передачи, т.е. по траектории E (рис. 7). В соответствии с (18) для сателлита 4 необходимо ввести поступательное движение вдоль оси Y . Подвижность, создаваемая

дополнительным рычагом 6, должна способствовать этому движению. Однако, конструкция, показанная на рис. 6 и рис. 7, обеспечивает движение центра сателлита по траектории B (рис. 7), что соответствует поступательному движению вдоль оси Z . Значит, введенная подвижность приводит, в основном, к изменению межосевых расстояний зубчатых зацеплений планетарной передачи. Таким образом, техническое решение, приведенное в [7], не обеспечивает эффективное решение задачи самоустановки пассивных сателлитов. Обеспечить поступательное перемещение точки, являющейся центром сателлита, вдоль оси Y может, например, четырехзвенный рычажный механизм, возможный вариант которого показан на рис. 8.

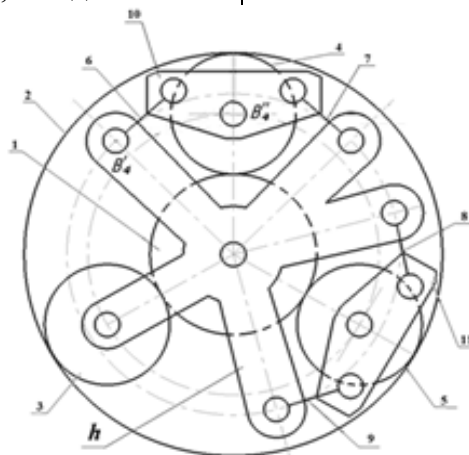


Рис. 8. Схема механизма с самоустановкой пассивных сателлитов при поступательном движении
 Fig. 8. Scheme of the mechanism with self-installation of passive satellites due to translation motion

С водилом шарнирно связаны шатуны 6, 7, 8 и 9. Дополнительные шатуны 10 и 11 шарнирно соединены с шатунами 6, 7 и 8, 9, соответственно. В шатунах 10 и 11 установлены пассивные сателлиты 4 и 5. Сателлиты 4 и 5 самоустанавливаются относительно звеньев 1 и 2 перемещаясь преимущественно в направлении перпендикулярном прямой, соединяющей центры зацепляющихся зубчатых колес. Эта траектория перемещения центра вращения сателлита показана отрезком *E* на фиг. 7.

Заключение

1. Матричный метод структурного анализа упрощает решение задачи определения и устранения избыточных связей в механизмах. В отличие от алгебраического метода он позволяет определить имеющиеся подвижности звеньев и не только найти число избыточных связей, но и установить каких именно подвижностей не хватает для их устранения.

2. Для обеспечения линейчатого контакта зубьев в зацеплении необходимо не только устранить избыточные связи, обусловленные отсутствием необходимых вращательных подвижностей, но и нейтрализовать действие вращательной подвижности самого зубчатого зацепления, приводящей к изменению линейчатого контакта на точечный. Для это можно использовать введение одноименных нейтрализующих дублирующих подвижностей для зацепляющихся колес. Действующие на звенья силы будут способствовать линейчатому контакту в зацеплениях. Однако данные решения существенно усложняют конструкцию планетарных механизмов.

3. Наиболее простой путь для обеспечения отсутствия кромочного контакта во всех зубчатых зацеплениях планетарно-

Четвертый и последующие сателлиты могут аналогично соединяться с центральными звеньями механизма. Предложенное техническое решение применимо и для планетарных передач с двумя внешними или с двумя внутренними зацеплениями. Вариант планетарного механизма, показанный на рис. 6 и рис. 7, может использоваться только для передачи с одним внешним и одним внутренним зацеплением. Конструкции аналогичных планетарных передач, приведенные в [8], очень сложны.

го механизма – выполнение одного колеса в каждом зубчатом зацеплении с бочкообразным продольным профилем зубьев. Такой профиль могут иметь, например, зубья солнечного и опорного колес, а в случае однозвенцового сателлита только его зубья. Данное техническое решение применимо при любом числе сателлитов.

4. Для более равномерного распределения нагрузки по сателлитам недостаточно устанавливать пассивные сателлиты на дополнительных рычагах. Рычаги дают перемещение, изменяющееся, в основном, межосевые расстояния в зубчатых зацеплениях. В предложенном техническом решении самоустановка происходит за счет поступательного перемещения сателлитов параллельно касательным в полюсе зацепления к начальной окружности солнечного колеса.

5. Выполнение зубьев сателлитов с бочкообразным продольным профилем и использование рычажных механизмов для соединения каждого пассивного сателлита с водилом позволяет строить рациональные планетарные механизмы с разным числом сателлитов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: справочник. М.: Машиностроение, 1979. 343 с.
2. Гудимова Л.Н., Дворников Л.Т. Проблемы исключения избыточных связей в плоских шарнирных механизмах. Фундаментальные исследования. 2013. №6–1. С. 24–32.
3. Пономаренко Д.И., Свечников А.А. Проблемы, возникающие при выборе структурных схем ме-

- ханизмов. Наука и образование транспорту. 2015. № 1. С. 30–32.
4. Третьяков В.М. Матричный метод определения избыточных связей и подвижностей в механизмах. Известия вузов. Машиностроение. 1996. №10–12. С. 3–8.
5. Третьяков В.М. Формирование простых кинематических пар на основе узла сопряжения

- «точка». Теория механизмов и машин. 2015. Т. 13. № 26. С. 46–61. DOI 10.5862.26.6
6. Дворников Л. Т., Дмитриев В.В. Теория структурного синтеза зубчатых механизмов как плоских кинематических цепей с высшими парами. М.: ООО «Эдитус», 2014. 116 с. ISBN 978-5-00058-081-3.
 7. Патент № 2342573 Российская Федерация, МПК F16H 1/48 (2006.01). Планетарный механизм: № 1.
 - Reshetov LN. Self-adjusting mechanisms: handbook. Moscow: Mashinostroenie; 1979.
 2. Gudimova LN, Dvornikov LT. Problems of eliminating redundant connections in flat linkworks. *Fundamentalnie Issledovaniya*. 2013;6-1:24-32.
 3. Ponomarenko DI, Svechnikov AA. Problems arising when choosing structural schemes of mechanisms. *Nauka I Obrazovanie Transportu*. 2015;1:30-32.
 4. Tretyakov VM. Matrix method for determining excess bonds and mobility in mechanisms. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 1996;10-12:3-8.
 5. Tretyakov VM. Formation of simple kinematic pairs on the basis of an interface node "point". *Theory of Mechanisms and Machines*. 2015;13(26):46-61. DOI 10.5862.26.6

- 2007126434: заявл. 11.07.2007: опубл. 27.12.2008 / Дворников Л.Т., Дмитриев В.В., Бондаренко В.С.; заявитель СГИУ. 6 с.
8. Пивоваров А.О., Шевчук В.П. Разработка рациональных конструкций планетарных механизмов, применяемых в трансмиссиях гусеничных тракторов. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2014. №11. С. 577–580.
6. Dvornikov LT, Dmitriev VV. Theory of structural synthesis of gear mechanisms as flat kinematic chains with higher pairs. Moscow: ООО "Editus"; 2014.
7. Dvornikov LT, Dmitriev VV, Bondarenko VS. Patent no. 2342573 Russian Federation, МПК F16H 1/48. 2006. Planetary mechanism: no. 2007126434. 2007 July 11.
8. Pivovarov AO, Shevchuk VP. Development of efficient designs of planetary mechanisms used in caterpillar tractor transmissions. *International Journal of Applied and Fundamental Research*. 2014;11:577-580.

Информация об авторах:

Третьяков Владимир Михайлович, доктор технических наук, доцент, тел.: 89206253968, профессор кафедры «Наземные транспортно-

технологические комплексы» Ковровской государственной технологической академии им. В.А. Дегтярева; SPIN-код: 6234-5217.

Tretyakov Vladimir Mikhailovich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Ground Transportation and Technological Complexes at Kov-

rov State Technological Academy named after V.A. Degtyarev, phone: 89206253968, SPIN-code: 6234-5217.

**Статья опубликована в режиме Open Access.
Article published in Open Access mode.**

Статья поступила в редакцию 19.11.2021; одобрена после рецензирования 10.12.2021; принята к публикации 21.03.2022. Рецензент – Шалыгин М.Г., доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой «Трубопроводные транспортные системы» Брянского государственного технического университета, член редсовета журнала «Транспортное машиностроение».

The article was submitted to the editorial office on 19.11.2021; approved after review on 10.12.2021; accepted for publication on 21.03.2022. The reviewer is Shaligin M.G., Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Pipeline Transport Systems at Bryansk State Technical University, member of the Editorial Board of the journal *Transport Engineering*.