

УДК 514.851

DOI: 10.30987/1999-8775-2021-6-11-22

В.А. Короткий, И.Г. Витовтов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Разработана методика моделирования упругой кривой, инцидентной набору n компланарных точек и обладающей минимальной средней кривизной, характерной для естественных (природоподобных) кривых. Предложен упрощенный способ расчета коэффициентов аппроксимирующего сплайна, позволяющий заменить решение системы $2n$ нелинейных уравнений (условий гладкости) последовательным решением n систем двух уравнений.

Для моделирования природоподобных кривых с большими прогибами предложено использовать кубический сплайн Фергюсона, проходящий через заданные точки и касающийся в этих точках заданных прямых.

Ключевые слова: аффинное сжатие, кубический полином, векторная производная, сплайн Фергюсона, графическое дифференцирование.

V.A. Korotky, I.G. Vitovtov

NATURE-LIKE CURVE MODELING

A physical spline is called an elastic rod the cross-section dimensions of which are rather small as compared with the length and radius of its axis curvature. Such a rod when passing through specified points obtains in natural way a nature-like shape characterized with minimum energy of inner stresses and minimum mean curvature. A search for the equation of elastic line is a difficult mathematical problem having no elementary solution.

The work purpose: the development of the experimental-rated procedure for modeling a nature-like elastic curve passing through complanar points specified in advance.

The investigation methods: methods of piece-cubic interpolation based on the application of polynomial splines and compound curves specified by parametric equations. In the paper there are considered polynomial and parametric methods of the geometric modeling of the physical spline passing through the points specified in advance. The elastic line of the physical spline is obtained experimentally.

The investigation results: it is shown that unlike a polynomial model a parametrized model on the basis of Fergusson curve gives high accuracy of approximation if in basic points there are specified tangents to the elastic line of the physical spline with large deflections.

Novelty: there is offered a simplified method for the computation of factors of an approximating spline allowing the substitution of the $2n$ system of nonlinear equations (smoothness conditions) by the successive solution of n systems of two equations.

Conclusions: for the modeling of nature-like curves with large deflections there is offered the application of Fergusson cubic spline passing through specified points and touching the specified straight lines in these points. The error of the modeling of the natural elastic line with free ends at $n=5$ does not exceed 0.4%.

Key words: affinating compression, cubic polynomial, vector derivative, Fergusson spline, graphic differentiation.

Введение

Природоподобной кривой называют линию, образованную осью упругого стержня, проходящего через наперед заданные точки. Предполагается, что размеры поперечного сечения такого стержня весьма малы по сравнению с длиной и радиусом кривизны его оси. Такую кривую называют “физическим сплайном”.

Пример физического сплайна – тонкая металлическая линейка. Проходя через заданные на плоскости точки, линейка естественным образом приобретает форму, характеризующуюся минимальной энерги-

ей внутренних напряжений и минимальной средней кривизной. Такие формы широко используются в современном архитектурно-строительном проектировании [1, 2, 3].

Теоретическое уравнение физического сплайна может быть найдено лишь при условии малых прогибов (малых отклонений от прямой линии). В этом случае физический сплайн удовлетворительно описывается составной кусочно-кубической полиномиальной кривой второй степени гладкости [4].

Для больших прогибов решение принципиально усложняется. Согласно [5], оно сводится к вариационной задаче, не имеющей элементарного решения. Поэтому моделирование природоподобной кри-

Постановка задачи

На плоскости указаны n базисных точек. Требуется найти достаточно простую алгебраическую функцию, аппроксимирующую (заменяющую) проходящую через эти точки природоподобную кривую (физический сплайн). Эта математическая функция необходима для выполнения прочностных и массогабаритных расчетов проектируемого здания или технического сооружения, что обуславливает актуаль-

вой с большими прогибами целесообразно выполнять экспериментально (используя плаз-планшет и упругую металлическую линейку), с последующей аппроксимацией полученной кривой.

ность и практическую значимость поставленной задачи [6, 7].

Здесь рассматриваются два способа аппроксимации: 1) на основе кубических парабол [8]; 2) с помощью кубического параметрического сплайна, составленного из кривых Фергюсона [9, 10].

В качестве исходных данных использованы результаты экспериментального моделирования физического сплайна, проходящего через $n = 5$ компланарных точек.

Экспериментальное моделирование физического сплайна

На планшете закреплена масштабнокординатная бумага. В опорные точки $A(1.2, 0.9)$, $B(2.1, 2.3)$, $C(2.8, 4)$, $D(5, 3.2)$, $E(5.5, 2.1)$ вбиты тонкие булавки с нанесенной на них смазкой (для снижения трения). Масштаб планшета 70:1. На планшет уложена гибкая металлическая линейка, огибающая булавки. Координаты опорных точек назначены в зоне упругой деформации материала линейки.

Модель физического сплайна со свободными концами. Моделирование физического сплайна со свободными кон-

цами выполнено в двух вариантах. Согласно первому варианту, металлическая линейка проходит через указанные опорные точки A, B, C, D, E . Согласно второму варианту, исходный набор опорных точек подвергается аффинному сжатию к оси x с коэффициентом сжатия 0.5. Новые опорные точки A', B', C', D', E' занимают среднее положение между исходными точками A, B, C, D, E и осью x (рис. 1). В обоих вариантах свободные концы линеек принимают свое естественное положение.

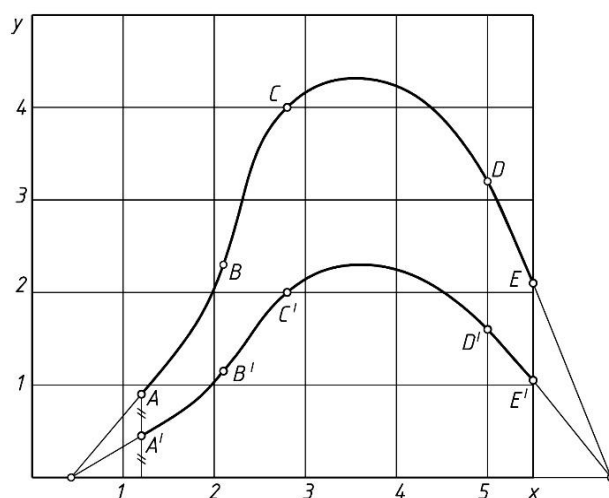
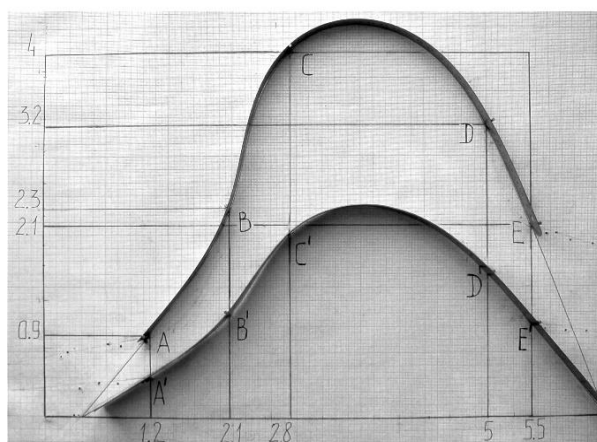


Рис. 1. Исходная и аффинно-сжатая упругие линейки со свободными концами (фото и чертеж)

Используя алгоритм графического дифференцирования [11], определяем значения производных (тангенсов углов

$$tg\delta_A = 1,134, tg\delta_B = 2,840, tg\delta_C = 0,985, tg\delta_D = -1,815, tg\delta_E = -2,460.$$

Выполнив аффинное сжатие $\{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{A', B', C', D', E'\}$ с коэффициентом сжатия 0,5, замечаем, что касательные к исходной и сжатой линейкам в конечных точках A, A' и E, E' пересекаются на оси x (рис. 1), следовательно, первые производные на концах сжатого физического сплайна уменьшились ровно в два раза.

$$tg\delta_A = 0,567, tg\delta_B = 1,205; tg\delta_C = 0,811; tg\delta_D = -1,00; tg\delta_E = -1,230.$$

Производные в опорных точках исходной и сжатой кривой изменились не в 2 раза, а в 2,36 (точки $B \sim B'$), в 1,21 (точки $C \sim C'$), в 1,815 (точки $D \sim D'$), то есть деформация физического сплайна $\{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{A', B', C', D', E'\}$ имеет в целом нелинейный характер.

$$tg\delta_A = 0,2; tg\delta_B = 5,16; tg\delta_C = 0,83; tg\delta_D = -4,36; tg\delta_E = -0,3.$$

Аффинно-сжатый сплайн $A'B'C'D'E'$ с коэффициентом сжатия 0,5:

$$tg\delta_A = 0,1; tg\delta_B = 1,528; tg\delta_C = 0,721; tg\delta_D = -1,481; tg\delta_E = -0,15.$$

Как и для сплайна со свободными концами, в случае защемленных концов наблю-

наклона касательных) исходного физического сплайна $ABCDE$ в его опорных точках:

Тем не менее, нельзя утверждать, что аффинное сжатие семейства опорных точек приводит к аффинной деформации любого сегмента физического сплайна. Планшетные измерения дают для сжатого сплайна следующий результат:

Модель физического сплайна с защемленными концами. На рис. 2 представлены макеты физических сплайнов с защемленными концами. Исходный сплайн $ABCDE$ характеризуется касательными в опорных точках:

дается нелинейная деформация упругой линии физического сплайна.

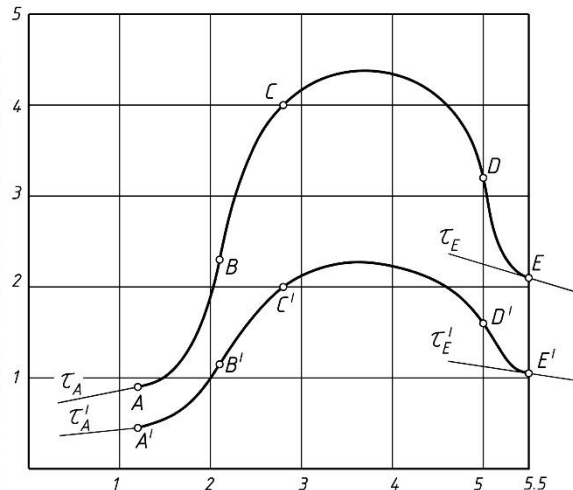
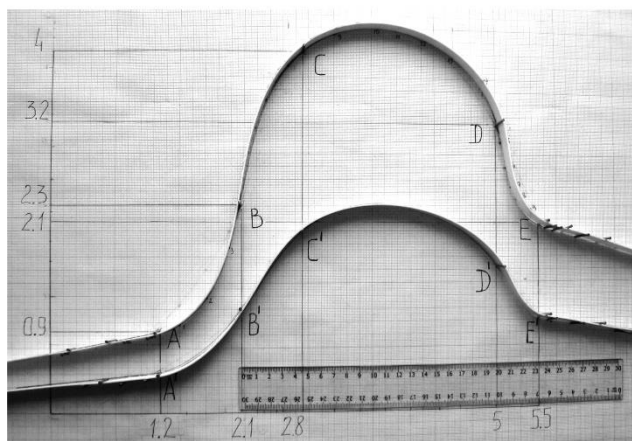


Рис. 2. Исходная и аффинно-сжатая упругие линейки с защемленными концами (фото и чертеж)

Полиномиальная аппроксимация

Будем искать уравнения сегментов AB, BC, CD, DE в виде кубических полиномов:

$$\begin{aligned} S_{AB}(x) &= a_1 + b_1(x - x_A) + c_1(x - x_A)^2 + d_1(x - x_A)^3, \quad x \in [x_A, x_B]; \\ S_{BC}(x) &= a_2 + b_2(x - x_B) + c_2(x - x_B)^2 + d_2(x - x_B)^3, \quad x \in [x_B, x_C]; \\ S_{CD}(x) &= a_3 + b_3(x - x_C) + c_3(x - x_C)^2 + d_3(x - x_C)^3, \quad x \in [x_C, x_D]; \\ S_{DE}(x) &= a_4 + b_4(x - x_D) + c_4(x - x_D)^2 + d_4(x - x_D)^3, \quad x \in [x_D, x_E]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x_A = 1,2; x_B = 2,1; x_C = 2,8; x_D = 5; x_E = 5,5$.

Составная кривая (1) – кубический полиномиальный сплайн. В отличие от реального (физического) сплайна его называют математическим сплайном. Как и физический сплайн, сплайн (1) проходит через заданные точки A, B, C, D, E , удовлетворяет заданным граничным условиям и имеет второй порядок гладкости (непрерывно изменяющуюся кривизну). Тем не менее, как будет показано ниже, форма физического и математического сплайнов может существенно различаться.

$$a_1 = y_A = 0,9; a_2 = y_B = 2,3; a_3 = y_C = 4; a_4 = y_D = 3,2. \quad (2)$$

Таким образом, в системе уравнений (1) содержится не 16, а всего 12 подлежащих определению коэффициентов.

Уравнения (1) содержат 16 неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1...4$), которые определяются из трех групп условий:

- инцидентности сегментов точкам A, B, C, D, E ;
- отсутствия изломов (равенство первых производных на стыках сегментов);
- непрерывного изменения кривизны (равенство вторых производных в стыковых точках).

Заметим, что из (1) непосредственно следует:

Условия инцидентности имеют вид:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3, \\ y_C &= y_B + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3, \\ y_D &= y_C + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 + d_3 h_3^3, \\ y_E &= y_D + b_4 h_4 + c_4 h_4^2 + d_4 h_4^3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_1 = x_B - x_A, h_2 = x_C - x_B, h_3 = x_D - x_C, h_4 = x_E - x_D$.

Условия отсутствия изломов имеют вид:

$$\begin{aligned} b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 &= b_2, \\ b_2 + 2c_2 h_2 + 3d_2 h_2^2 &= b_3, \\ b_3 + 2c_3 h_3 + 3d_3 h_3^2 &= b_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия непрерывного изменения кривизны имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1 + 3d_1 h_1 &= c_2, \\ c_2 + 3d_2 h_2 &= c_3, \\ c_3 + 3d_3 h_3 &= c_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Десять уравнений (3), (4), (5) содержат двенадцать неизвестных коэффициентов b_i, c_i, d_i ($i = 1, \dots, 4$). Два дополнительных условия назначаются либо приравнением нулю вторых производных в концевых точках A, E (свободные концы), либо указанием первых производных в точках A, E (защемленные концы).

Полиномиальная модель физического сплайна со свободными концами.

Вторая производная $S''_{AB}(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_A)$ сегмента AB в точке A должна быть равна нулю. Отсюда следует, что $c_1 = 0$.

Вторая производная $S''_{DE}(x) = 2c_4 + 6d_4(x - x_D)$ сегмента DE в точке E также должна быть равна нулю. Отсюда следует, что

$$S''_{DE}(x_E) = c_4 + 3d_4 h_4 = 0. \quad (6)$$

Решая (с помощью системы компьютерной алгебры SMATH Studio Desktop) систему линейных уравнений (3), (4), (5), (6) с учетом $c_1 = 0$, находим коэффициенты b_i, c_i, d_i . Получаем математический сплайн со свободными концами, проходящий через наперед заданные точки A, B, C, D, E (рис. 3а):

$$\begin{aligned}
 S_{AB}(x) &= 0,9 + 1,2174(x-1,2) + 0,4175(x-1,2)^3, \quad x \in [1,2; 2,1]; \\
 S_{BC}(x) &= 2,3 + 2,2319(x-2,1) + 1,1272(x-2,1)^2 - 1,2089(x-2,1)^3, \quad x \in [2,1; 2,8]; \\
 S_{CD}(x) &= 4 + 2,0329(x-2,8) - 1,4114(x-2,8)^2 + 0,1464(x-2,8)^3, \quad x \in [2,8; 5]; \\
 S_{DE}(x) &= 3,2 - 2,0516(x-5) - 0,4452(x-5)^2 + 0,2968(x-5)^3, \quad x \in [5; 5,5].
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Сравнивая физический (поз. 1) и математический (поз. 1') сплайны (рис. 3а), замечаем существенное различие на интервалах BC и CD. Это различие уменьшается для аффинно-сжатых кривых (поз. 2 и 2'), что подтверждает известное положение: математический сплайн, составленный из кубических полиномов, тем ближе

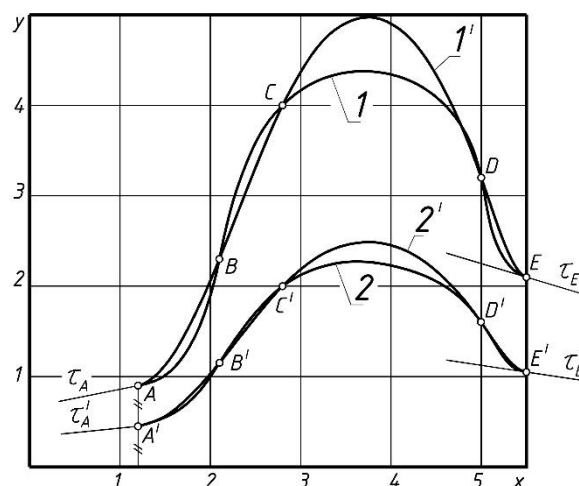
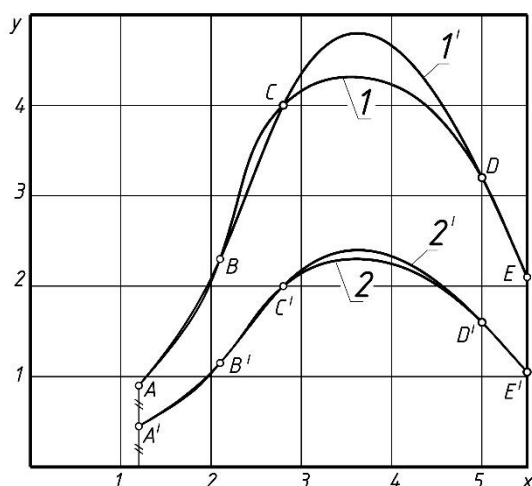
к физическому сплайну, чем меньше прогибы физического сплайна.

Полиномиальная модель физического сплайна с заземленными концами. Тангенсы углов заделки равны: $tg\delta_A = 0,2$, $tg\delta_E = -0,3$. Граничные условия приобретают вид:

$$S'_{AB}(x_A) = tg\delta_A = 0,2 = b_1, \quad S'_{DE}(x_E) = tg\delta_E = -0,3 = b_4 + 2c_4h_4 + 3d_4h_4^2. \tag{8}$$

Решая систему линейных уравнений (3), (4), (5), (8), находим коэффициенты

b_i, c_i, d_i . Получаем уравнение кубического сплайна с заземленными концами:



а)

б)

Рис. 3. Полиномиальная модель физического сплайна:
а – свободные концы; б – заземленные концы (1, 2 – эксперимент, 1', 2' – расчет)

$$\begin{aligned}
 S_{AB}(x) &= 0,9 + 0,2(x-1,2) + 2,0181(x-1,2)^2 - 0,5688(x-1,2)^3, \quad x \in [1,2; 2,1]; \\
 S_{BC}(x) &= 2,3 + 2,4504(x-2,1) + 0,4824(x-2,1)^2 - 0,7336(x-2,1)^3, \quad x \in [2,1; 2,8]; \\
 S_{CD}(x) &= 4 + 2,0473(x-2,8) - 1,0583(x-2,8)^2 + 0,0171(x-2,8)^3, \quad x \in [2,8; 5]; \\
 S_{DE}(x) &= 3,2 - 2,8572(x-5) - 1,1710(x-5)^2 + 4,971(x-5)^3, \quad x \in [5; 5,5].
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Полиномиальный сплайн (9) проходит через заданные точки A, B, C, D, E и имеет заданные производные в граничных точках A, E. Тем не менее, результаты моделирования (рис. 3б) показывают заметное различие физического (поз. 1, 2) и ма-

тематического (поз. 1', 2') сплайнов, что ставит под сомнение возможность использования кубических полиномов для моделирования физических сплайнов с большими прогибами.

Параметрическая аппроксимация

Векторное уравнение сегмента параметрически заданной кубической кривой, проходящей через точки R_0, R_1 и касаю-

щейся в этих точках прямых τ_0, τ_1 , имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}(1)(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}(0)t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}(1)(-t^2 + t^3), \quad (10)$$

где параметр t изменяется в диапазоне $[0, 1]$. Векторы $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1)$ указывают положение опорных точек R_0, R_1 , а направления векторных производных $\dot{\mathbf{r}}(0), \dot{\mathbf{r}}(1)$ при $t=0$ и $t=1$ совпадают с направлениями касательных τ_0, τ_1 в опорных точках.

Кубическая кривая (10), предложенная Фергюсоном в 60-х годах 20 века, описывает *двухпараметрическое семейство* кубических кривых, инцидентных точкам R_0, R_1 и касающихся в этих точках прямых τ_0, τ_1 . Форма любой кривой этого семейства определяется величинами $|\dot{\mathbf{r}}(0)|, |\dot{\mathbf{r}}(1)|$. При увеличении $|\dot{\mathbf{r}}(0)|$ кривая $\mathbf{r}(t)$ теснее прилегает к касательной τ_0 , а при увеличении $|\dot{\mathbf{r}}(1)|$ теснее прилегает к τ_1 [12, 13].

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = w^{(1)}\mathbf{T}, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = w^{(2)}\mathbf{T}, \quad (13)$$

где \mathbf{T} – единичный вектор общей касательной, а коэффициенты $w^{(1)}, w^{(2)}$ – модули первых производных в точке стыка. Подставляя (13) в (12), получаем условие гладкости:

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = (w^{(2)} / w^{(1)})^2 \ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1). \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(0) = w_0\mathbf{T}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = w_1^{(1)}\mathbf{T}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = w_1^{(2)}\mathbf{T}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(1) = w_2\mathbf{T}_2 \quad (15)$$

и подставляя в (10), получаем уравнения сегментов $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ и $\mathbf{r}^{(2)}(t)$:

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_1(3t^2 - 2t^3) + w_0\mathbf{T}_0t(1-t)^2 + w_1^{(1)}\mathbf{T}_1(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1], \quad (16)$$

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_1(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_2(3t^2 - 2t^3) + w_1^{(2)}\mathbf{T}_1t(1-t)^2 + w_2\mathbf{T}_2(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1]. \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ – единичные векторы касательных τ_0, τ_1, τ_2 , а коэффициенты w_i – модули первых производных. В общем случае $w_1^{(1)} \neq w_1^{(2)}$.

Дважды дифференцируя выражение (16) и подставляя $t=1$, получаем значение второй производной сегмента R_0-R_1 в его конечной точке R_1 :

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = 6\mathbf{r}_0 - 6\mathbf{r}_1 + 2w_0\mathbf{T}_0 + 4w_1^{(1)}\mathbf{T}_1.$$

$$3\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_1(\lambda_1^2 - 1) - 3\mathbf{r}_0\lambda_1^2 = w_0\mathbf{T}_0\lambda_1^2 + 2w_1^{(2)}(1 + \lambda_1)\mathbf{T}_1 + w_2\mathbf{T}_2, \quad (18)$$

где в общем случае $\lambda_1 = w_1^{(2)} / w_1^{(1)}$.

Конструирование сплайна Фергюсона. Через указанные на плоскости точки A, B, C, D, E требуется провести сплайн Фергюсона – гладкую кривую, со-

Условие гладкости в форме Фергюсона. Согласно выражению для расчета вектора кривизны

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}, \quad (11)$$

условие гладкого соединения кубических сегментов (10) имеет вид

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)|^3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)}{|\dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)|^3}, \quad (12)$$

где надстрочный символ в скобках означает номер сегмента. Параметр t в уравнениях сегментов $\mathbf{r}^{(1)}(t), \mathbf{r}^{(2)}(t)$ изменяется в диапазоне $[0, 1]$ независимо от номера сегмента.

Учитывая, что в стыковой точке оба сегмента должны иметь общую касательную, представим первые производные, входящие в (12), в виде

Пусть требуется провести гладкую кривую через опорные точки R_0, R_1, R_2 , заданные радиус-векторами $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Будем искать решение в виде кривой, состоящей из сегментов кубических кривых вида (10). Записывая векторные производные в виде

Дважды дифференцируя выражение (17) и подставляя $t=0$, находим вторую производную сегмента R_1-R_2 в его начальной точке R_1 :

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = -6\mathbf{r}_1 + 6\mathbf{r}_2 - 4w_1^{(2)}\mathbf{T}_1 - 2w_2\mathbf{T}_2.$$

Подставляя $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)$ и $\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)$ в (14), получаем условие гладкого соединения сегментов:

ставленную из сегментов вида (10). В конечных точках A, E конструируемой кривой заданы касательные τ_A, τ_E . Сплайн имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB}(t) &= \mathbf{r}_A(1-3t^2+2t^3) + \mathbf{r}_B(3t^2-2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_A t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}(-t^2+t^3), t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{BC}(t) &= \mathbf{r}_B(1-3t^2+2t^3) + \mathbf{r}_C(3t^2-2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}(-t^2+t^3), t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{CD}(t) &= \mathbf{r}_C(1-3t^2+2t^3) + \mathbf{r}_D(3t^2-2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}(-t^2+t^3), t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{DE}(t) &= \mathbf{r}_D(1-3t^2+2t^3) + \mathbf{r}_E(3t^2-2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_E(-t^2+t^3), t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}_A = w_A \mathbf{T}_A, \dot{\mathbf{r}}_E = w_E \mathbf{T}_E$ – векторные производные в граничных точках A, E . Надстрочный индекс в скобках означает номер сегмента. Направления единичных векторов $\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_E$ заданы касательными $\tau_A,$

$$\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)} = w_B^{(1)} \mathbf{T}_B, \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} = w_B^{(2)} \mathbf{T}_B, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)} = w_C^{(2)} \mathbf{T}_C, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} = w_C^{(3)} \mathbf{T}_C, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)} = w_D^{(3)} \mathbf{T}_D, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} = w_D^{(4)} \mathbf{T}_D, \tag{20}$$

где $\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_D$ – единичные касательные векторы в точках B, C, D . Производные (20) определяются из условий гладкости.

$$\begin{aligned} 3\mathbf{r}_C + 3\mathbf{r}_B(\lambda_B^2 - 1) - 3\mathbf{r}_A\lambda_B^2 &= w_A \mathbf{T}_A \lambda_B^2 + 2w_B^{(2)}(1 + \lambda_B)\mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C w_C^{(3)} / \lambda_C, \\ 3\mathbf{r}_D + 3\mathbf{r}_C(\lambda_C^2 - 1) - 3\mathbf{r}_B\lambda_C^2 &= w_B^{(2)} \mathbf{T}_B \lambda_C^2 + 2w_C^{(3)}(1 + \lambda_C)\mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D w_D^{(4)} / \lambda_D, \\ 3\mathbf{r}_E + 3\mathbf{r}_D(\lambda_D^2 - 1) - 3\mathbf{r}_C\lambda_D^2 &= w_C^{(3)} \mathbf{T}_C \lambda_D^2 + 2w_D^{(4)}(1 + \lambda_D)\mathbf{T}_D + w_E \mathbf{T}_E, \end{aligned} \tag{21}$$

или, с учетом (20):

$$\begin{aligned} 3\mathbf{r}_C + 3\mathbf{r}_B(\lambda_B^2 - 1) - 3\mathbf{r}_A\lambda_B^2 &= \dot{\mathbf{r}}_A \lambda_B^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}(1 + \lambda_B) + \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} / \lambda_C, \\ 3\mathbf{r}_D + 3\mathbf{r}_C(\lambda_C^2 - 1) - 3\mathbf{r}_B\lambda_C^2 &= \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} \lambda_C^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}(1 + \lambda_C) + \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} / \lambda_D, \\ 3\mathbf{r}_E + 3\mathbf{r}_D(\lambda_D^2 - 1) - 3\mathbf{r}_C\lambda_D^2 &= \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} \lambda_D^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}(1 + \lambda_D) + \dot{\mathbf{r}}_E, \end{aligned} \tag{21'}$$

где $\lambda_B = w_B^{(2)} / w_B^{(1)}, \lambda_C = w_C^{(3)} / w_C^{(2)}, \lambda_D = w_D^{(4)} / w_D^{(3)}$ (отношения модулей первых производных в стыковых точках B, C, D).

Условия (21), (21') могут трактоваться двойственным образом. Если зафиксировать скалярные величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$, то система уравнений (21') становится системой линейных уравнений относительно неизвестных векторных величин $\dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}$. Если же задать направления единичных касательных векторов $\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C,$

\mathbf{T}_D , то система (21) становится системой нелинейных уравнений относительно скалярных величин $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, w_B^{(2)}, w_C^{(3)}, w_D^{(4)}$.

Фиксируя в (21') скалярные величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$, получаем условия гладкости:

$$\begin{aligned} 2(1 + \lambda_B)\dot{r}_{BX}^{(2)} + \dot{r}_{CX}^{(3)} / \lambda_C &= 3x_C + 3x_B(\lambda_B^2 - 1) - 3x_A\lambda_B^2 - \lambda_B^2 w_A \cos \delta_A, \\ 2(1 + \lambda_B)\dot{r}_{BY}^{(2)} + \dot{r}_{CY}^{(3)} / \lambda_C &= 3y_C + 3y_B(\lambda_B^2 - 1) - 3y_A\lambda_B^2 - \lambda_B^2 w_A \sin \delta_A, \\ \lambda_C^2 \dot{r}_{BX}^{(2)} + 2(1 + \lambda_C)\dot{r}_{CX}^{(3)} + \dot{r}_{DX}^{(4)} / \lambda_D &= 3x_D + 3x_C(\lambda_C^2 - 1) - 3x_B\lambda_C^2, \\ \lambda_C^2 \dot{r}_{BY}^{(2)} + 2(1 + \lambda_C)\dot{r}_{CY}^{(3)} + \dot{r}_{DY}^{(4)} / \lambda_D &= 3y_D + 3y_C(\lambda_C^2 - 1) - 3y_B\lambda_C^2, \\ \lambda_D^2 \dot{r}_{CX}^{(3)} + 2(1 + \lambda_D)\dot{r}_{DX}^{(4)} &= 3x_E + 3x_D(\lambda_D^2 - 1) - 3x_C\lambda_D^2 - w_E \cos \delta_E, \\ \lambda_D^2 \dot{r}_{CY}^{(3)} + 2(1 + \lambda_D)\dot{r}_{DY}^{(4)} &= 3y_E + 3y_D(\lambda_D^2 - 1) - 3y_C\lambda_D^2 - w_E \sin \delta_E, \end{aligned} \tag{22}$$

где δ_A и δ_E – углы наклона касательных τ_A, τ_E к оси x .

В условиях (22) можно варьировать пятью управляющими параметрами: модулями первых производных w_A, w_E в граничных точках A, E и величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$. При изменении этих величин меняется форма сплайна (19).

Пример 1. Найти аппроксимирующую функцию для физического сплайна $ABCDE$ со свободными концами (рис. 1), варьируя величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$.

Положив в (22) $w_A = w_E = 1, \lambda_B = 1, \lambda_C = 2, \lambda_D = 0.5$, находим компоненты векторных производных $\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}, \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}$. Раскладывая (19) по осям x, y , получаем

скалярные функции вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, позволяющие построить сплайн Фергюсона (рис. 4а). Погрешность аппроксимации достигает 4 %.

Пример 2. Найти аппроксимирующую функцию для физического сплайна $ABCDE$ с заземленными концами (рис. 2), варьируя величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$.

Подставляя в (22) координаты опорных точек A, B, C, D, E и значения $tg \delta_A = 0.2, tg \delta_E = -0.3$, положив $w_A = w_E = 1, \lambda_B = \lambda_D = 1, \lambda_C = 2$, получаем систему линей-

ных уравнений, из которой находим компоненты векторных производных, входящих в коэффициенты сплайна (19). Раскладывая (19) по осям x, y , получаем скалярные функции вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, позволяющие построить сплайн. На рис. 4, б представлен физический сплайн (поз. 1) и сплайны Фергюсона при $\lambda_C = 2$ (поз. 2) и $\lambda_C = 3$ (поз. 3). Погрешность аппроксимации более 10 %.

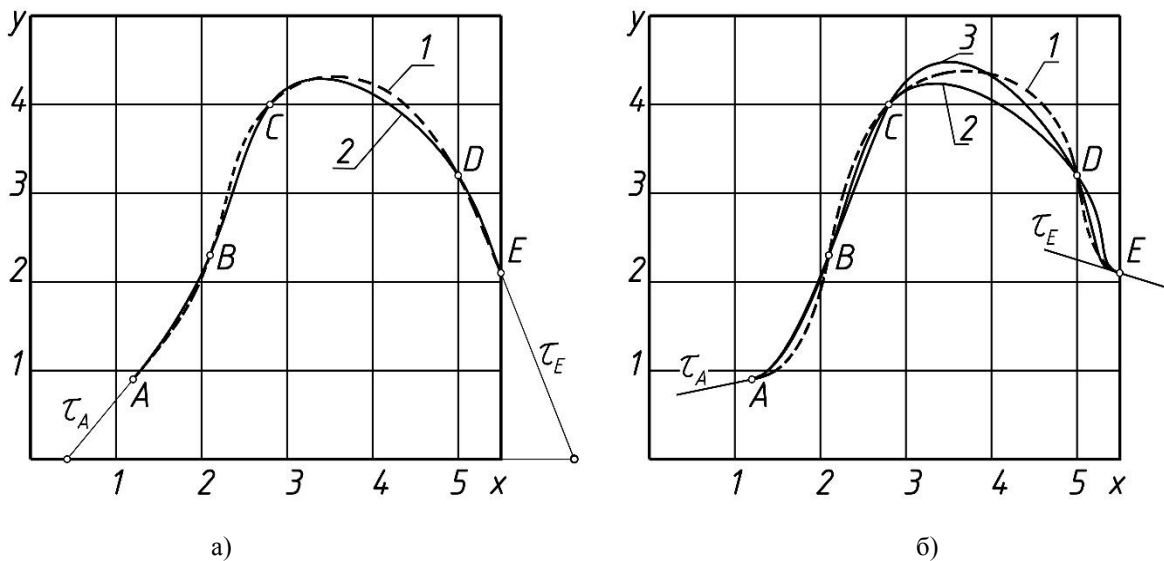


Рис. 4. Аппроксимация физического сплайна:
а – свободные концы; б – заземленные концы (поз. 1 – эксперимент, поз. 2, 3 – расчет)

Примечание. В условиях гладкости (21') можно произвольным образом задавать модули w_A, w_E первых производных в крайних точках A, E , а также величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$. Следовательно, имеется 5 управляющих параметров, влияющих на форму сплайна (19). Задача подбора этих параметров для аппроксимации реальной упругой линии может быть решена лишь путем многочисленных “численных экспериментов”. К тому же нет уверенности, что найденный таким образом вариант аппрок-

симирующего сплайна является наилучшим.

Таким образом, условия гладкости (21'), содержащие пять варьируемых параметров, не могут быть рекомендованы для моделирования физического сплайна.

Сплайн Фергюсона с заданными касательными. Рассмотрим алгоритм построения сплайна (19), проходящего через заданные опорные точки и касающегося в этих точках заданных прямых. Введем обозначения

$$z_1 = w_B^{(1)}, z_2 = w_B^{(2)}, z_3 = w_C^{(2)}, z_4 = w_C^{(3)}, z_5 = w_D^{(3)}, z_6 = w_D^{(4)}$$

Подставляя в (21), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных z_1, \dots, z_6 :

$$\begin{aligned}
3h_2 z_1^2 + (3h_1 - w_A \cos \delta_A) z_2^2 - 2 \cos \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \cos \delta_C &= 0; \\
3\Delta y_2 z_1^2 + (3\Delta y_1 - w_A \sin \delta_A) z_2^2 - 2 \sin \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \sin \delta_C &= 0; \\
3h_3 z_3^2 + 3h_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \cos \delta_B - 2 \cos \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \cos \delta_D &= 0; \\
3\Delta y_3 z_3^2 + 3\Delta y_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \sin \delta_B - 2 \sin \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \sin \delta_D &= 0; \\
3h_4 z_5^2 + 3h_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \cos \delta_C - 2 \cos \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \cos \delta_E &= 0; \\
3\Delta y_4 z_5^2 + 3\Delta y_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \sin \delta_C - 2 \sin \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \sin \delta_E &= 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$h_1 = x_B - x_A; h_2 = x_C - x_B; h_3 = x_D - x_C; h_4 = x_E - x_D; \Delta y_1 = y_B - y_A; \Delta y_2 = y_C - y_B; \Delta y_3 = y_D - y_C; \Delta y_4 = y_E - y_D.$$

Задавая углы δ_A, δ_E наклона касательных и модули w_A, w_E векторных производных $\dot{\mathbf{r}}_A = w_A \mathbf{T}_A, \dot{\mathbf{r}}_E = w_E \mathbf{T}_E$ в концевых точках A, E и решая нелинейную систему уравнений (23), находим модули $z_1 \dots z_6$ производных в стыковых точках B, C, D , что позволяет полностью определить коэффициенты сплайна (19).

Рассмотренный алгоритм предполагает итерационное решение нелинейной системы (23), что может стать серьезной вычислительной проблемой. Решение

можно упростить, используя разработанный авторами алгоритм подстановки.

Алгоритм подстановки. Зафиксируем первый сегмент AB сплайна (19), произвольно задав модули первых производных w_A и $w_B^{(1)}$ в точках A, B . Варьируя величинами w_A и $w_B^{(1)}$, добиваемся удовлетворительного совпадения расчетного сегмента AB с соответствующим сегментом физического сплайна. Подставляем найденные величины w_A и $w_B^{(1)} = z_1$ в первую пару уравнений системы (23):

$$\begin{aligned}
3h_2 z_1^2 + (3h_1 - w_A \cos \delta_A) z_2^2 - 2 \cos \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \cos \delta_C &= 0, \\
3\Delta y_2 z_1^2 + (3\Delta y_1 - w_A \sin \delta_A) z_2^2 - 2 \sin \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \sin \delta_C &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Решая (24), находим неизвестные $z_2 = w_B^{(2)}, z_3 = w_C^{(2)}$ и подставляем их во вторую пару уравнений системы (23):

$$\begin{aligned}
3h_3 z_3^2 + 3h_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \cos \delta_B - 2 \cos \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \cos \delta_D &= 0, \\
3\Delta y_3 z_3^2 + 3\Delta y_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \sin \delta_B - 2 \sin \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \sin \delta_D &= 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Решая (25), находим неизвестные $z_4 = w_C^{(3)}, z_5 = w_D^{(3)}$ и подставляем их в третью пару уравнений системы (23):

$$\begin{aligned}
3h_4 z_5^2 + 3h_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \cos \delta_C - 2 \cos \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \cos \delta_E &= 0, \\
3\Delta y_4 z_5^2 + 3\Delta y_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \sin \delta_C - 2 \sin \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \sin \delta_E &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Решая (26), находим неизвестные z_6, w_E . Все величины, входящие в коэффициенты сплайна (19), определены.

Примечание. Алгоритм подстановки позволяет заменить решение системы шести нелинейных уравнений (23) последовательным решением трех пар нелинейных уравнений (24), (25), (26).

Управление формой сплайна Фергюсона с заданными касательными

Раскладывая векторные уравнения (19) по осям x, y , получаем скалярные па-

раметрические уравнения сплайна Фергюсона:

$$\begin{aligned}
 x_{AB}(t) &= x_A(1-3t^2+2t^3) + x_B(3t^2-2t^3) + w_A \cos \delta_A t(1-t)^2 + w_B^{(1)} \cos \delta_B (-t^2+t^3), \\
 y_{AB}(t) &= y_A(1-3t^2+2t^3) + y_B(3t^2-2t^3) + w_A \sin \delta_A t(1-t)^2 + w_B^{(1)} \sin \delta_B (-t^2+t^3), \\
 x_{BC}(t) &= x_B(1-3t^2+2t^3) + x_C(3t^2-2t^3) + w_B^{(2)} \cos \delta_B t(1-t)^2 + w_C^{(2)} \cos \delta_C (-t^2+t^3), \\
 y_{BC}(t) &= y_B(1-3t^2+2t^3) + y_C(3t^2-2t^3) + w_B^{(2)} \sin \delta_B t(1-t)^2 + w_C^{(2)} \sin \delta_C (-t^2+t^3), \\
 x_{CD}(t) &= x_C(1-3t^2+2t^3) + x_D(3t^2-2t^3) + w_C^{(3)} \cos \delta_C t(1-t)^2 + w_D^{(3)} \cos \delta_D (-t^2+t^3), \\
 y_{CD}(t) &= y_C(1-3t^2+2t^3) + y_D(3t^2-2t^3) + w_C^{(3)} \sin \delta_C t(1-t)^2 + w_D^{(3)} \sin \delta_D (-t^2+t^3), \\
 x_{DE}(t) &= x_D(1-3t^2+2t^3) + x_E(3t^2-2t^3) + w_D^{(4)} \cos \delta_D t(1-t)^2 + w_E \cos \delta_E (-t^2+t^3), \\
 y_{DE}(t) &= y_D(1-3t^2+2t^3) + y_E(3t^2-2t^3) + w_D^{(4)} \sin \delta_D t(1-t)^2 + w_E \sin \delta_E (-t^2+t^3).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

В уравнениях (27) можно варьировать модулями w_A, w_E первых производных в крайних точках A, E . Если используется алгоритм подстановки, то можно произвольно задавать модули w_A и $w_B^{(1)}$ первых производных в граничных точках A, B первого сегмента. Таким образом, имеется всего два управляющих параметра, влияющих на форму сплайна, проходящего че-

$$tg \delta_A = 1,134; tg \delta_B = 2,840; tg \delta_C = 0,985; tg \delta_D = -1,8154; tg \delta_E = -2,460,$$

вычисляем синусы и косинусы углов наклона касательных $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D, \delta_E$ и подставляем их в условия гладкости (23).

$$\begin{aligned}
 z_1 = w_B^{(1)} &= 2,175; z_2 = w_B^{(2)} = 1,784; z_3 = w_C^{(2)} = 1,845; z_4 = w_C^{(3)} = 2,0335; \\
 z_5 = w_D^{(3)} &= 4,850; z_6 = w_D^{(4)} = 1,1935.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получаем уравнения аппроксимирующего сплайна, отличающегося от физического сплайна менее, чем на 0,4% (рис. 5а).

рез наперед заданные точки с указанными в этих точках касательными.

Пример 3. Моделирование физического сплайна $ABCDE$ со свободными концами (рис. 2).

Используя экспериментальные значения углов наклона касательных в опорных точках

Положив варьируемые параметры $w_A=w_E=1$, решаем систему уравнений (23) методом Ньютона (SMath Studio):

Пример 4. Моделирование физического сплайна с заземленными концами (рис. 3). Используем экспериментальные значения:

$$tg \delta_A = 0,2; tg \delta_B = 5,16; tg \delta_C = 0,83; tg \delta_D = -4,36; tg \delta_E = -0,3.$$

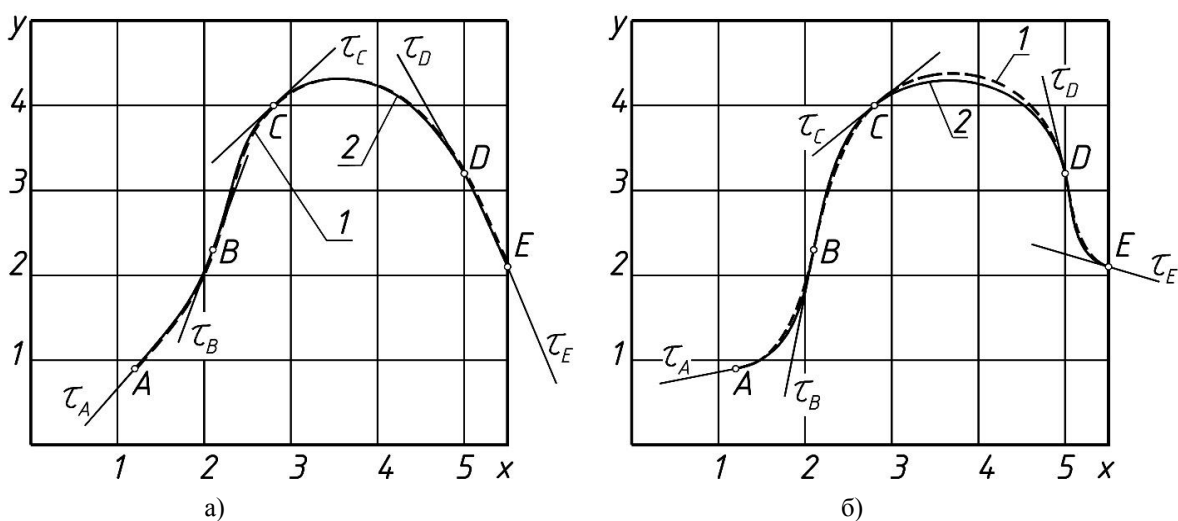


Рис. 5. Физический сплайн (поз. 1) и сплайн Фергюсона (поз. 2):
а – свободные концы; б – заземленные концы

Варьируя модулями w_A и $w_B^{(1)}$ производных $\dot{\mathbf{r}}_A, \dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}$ в граничных точках A, B первого сегмента, добиваемся совпадения формы расчетного сегмента AB с сегментом AB физического сплайна. В рассматриваемом

$$\begin{aligned} z_2 = w_B^{(2)} = 1,978; z_3 = w_C^{(2)} = 1,723; z_4 = w_C^{(3)} = 2,493; \\ z_5 = w_D^{(3)} = 3,672; z_6 = w_D^{(4)} = 1,292; w_E = 1,356. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27), получаем скалярные уравнения, позволяющие построить аппроксимирующий сплайн (рис. 5б). По-

мом примере требуемое совпадение достигнуто при $w_A = w_B^{(1)} = 2$. Используя алгоритм подстановки, последовательно решаем системы уравнений (24), (25), (26):

грешность аппроксимации составила менее 1,5%.

Заключение

В работе рассмотрена задача геометрического моделирования природоподобных кривых (физических сплайнов). Для решения задачи предлагается параметрическая модель на основе кубического сплайна Фергюсона. Формой сплайна можно управлять посредством указания касательных в его базисных точках и изменением модулей первых производных в конечных точках конструируемого сплайна. Для решения системы нелинейных уравнений (условий гладкой стыковки

сегментов сплайна) предлагается способ подстановки, позволяющий заменить решение системы $2(n-2)$ нелинейных уравнений последовательным решением $n-2$ пар нелинейных уравнений (n – количество базисных точек физического сплайна). На ряде примеров показано, что ошибка моделирования упругой линии физического сплайна со свободными концами не превышает 0,4%, а погрешность моделирования упругой линии с защемленными концами составляет менее 1,5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – Москва : Изд-во физико-математической литературы, 2012. – 472 с.
2. Иванов, Г. С. Теоретические основы начертательной геометрии / Г. С. Иванов. – Москва : Машиностроение, 1998. – 157 с.
3. Glaeser, G. Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik / G. Glaeser. – Moscow : Springer Spektrum, 2014. – 508 pp. - DOI 10.1007/978-3-642-41852-5.
4. Завьялов, Ю. С. Сплайны в инженерной геометрии / Ю. С. Завьялов, В. А. Леус, В. А. Ско-ропелов. – Москва : Машиностроение, 1985. – 224 с.
5. Фокс, А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – Москва : Мир, 1982. – 304 с.
6. Конопацкий, Е. В. Вычислительные алгоритмы моделирования одномерных обводов через k наперед заданных точек / Е. В. Конопацкий, А. А. Крысько, А. И. Бумага // Геометрия и графика. – 2018. Т. 6, № 3. – С. 20-32. – DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491.72807735.
7. Любчинов, Е. В. О гладкости стыковки линий и поверхностей при циклографическом моделировании поверхностных форм автомобильных дорог / Е. В. Любчинов, К. Л. Панчук // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Строительство и архитектура». – 2020. - Т. 20. - № 1. – С. 52-62. - DOI: 10.14529/build200106.
8. Понтрягин, Л. С. Кубическая парабола / Л. С. Понтрягин // Квант. – 1984. - №3. – С. 10-14, 32.
9. Уокер, Р. Алгебраические кривые / Р. Уокер. – Москва : Либроком, 2009. – 240 с.
10. Шикин, Е. В. Кривые и поверхности на экране компьютера / Е. В. Шикин, Л. И. Плисс. – Москва : Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с.
11. Прасолов, В. В. Геометрия / В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2013. – 336 с.
12. Савелов, А. А. Плоские кривые / А. А. Савелов. – Москва : Либроком, 2009. – 296 с.
13. Короткий, В. А. Кубические кривые в инженерной геометрии / В. А. Короткий // Геометрия и графика. – 2020.- Т. 8. - № 3. – С. 3-24. - DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24.
1. Golovanov, N.N. *Geometric Modeling* / N.N. Golovanov. – Moscow: Publishing House of Physical-Mathematical Literature, 2012. – pp. 472.
2. Ivanov, G.S. *Theoretical Fundamentals of Descriptive Geometry* / G.S. Ivanov. – Moscow: Mechanical Engineering, 1998. – pp. 157.

3. **Glaeser, G.** Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik / G. Glaeser. – Moscow : Springer Spektrum, 2014. – 508 pp. - DOI 10.1007/978-3-642-41852-5.
4. **Zaviyalov, Yu.S.** *Splines in Engineering Geometry* / Yu.S. Zaviyalov, V.A. Leus, V.A. Skorospelov. – Moscow: Mechanical Engineering, 1985. – pp. 224.
5. **Fox, A.** *Computational Geometry. Application in Design and Production* / A.Fox, M. Pratt. – Moscow: Mir, 1982. – pp. 304.
6. **Konopatsky, E.V.** Computational algorithms of one-dimensional outlines through k points specified in advance / E.V. Konopatsky, A.A. Krysko, A.I. Bumaga // *Geometry and Graphics*. – 2018. Vol.6, No.3. – pp. 20-32. - DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491.72807735.
7. **Lyubchinov, E.V.** On smoothness of line and surface joint at cyclographic modeling of highway surface forms / E.V. Lyubchinov, K.L. Panchuk // *Bulletin of South-Urals State University. "Construction and Architecture" Series*. – 2020. – Vol. 20. – No.1. – pp. 52-62. - DOI: 10.14529/build200106.
8. **Pontryagin, L.S.** Cubic Parabola / L.S. Pontryagin // *Quantum*. – 1984. – No.3. – pp. 10-14, 32.
9. **Wocker, R.** *Algebraic Curves* / R. Wocker. – Moscow: Librokom, 2009. – pp. 240.
10. **Shikin, E.V.** *Curves and Surfaces on Computer Display* / E.V. Shikin, L.I. Pliss. – Moscow: Dialogue-MIFI, 1996. – pp. 240.
11. **Prasolov, V.V.** *Geometry* / V.V. Prasolov, V.M. Tikhomirov. – Moscow: MCNMO Publishers, 2013. – pp. 336.
12. **Savelov, A.A.** *Flat Curves* / A.A. Savelov. – Moscow: Librokom, 2009. – pp. 296.
13. **Korotky, V.A.** Cubic curves in engineering geometry / V.A. Korotky // *Geometry and Graphics*. – 2020. – Vol.8. – No.3. – pp. 3-24. - DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24.

Ссылка для цитирования:

Короткий, В.А. Моделирование природоподобных кривых / В.А. Короткий, И.Г. Витовтов // *Вестник Брянского государственного технического университета*. – 2021. – № 6. – С. 11 - 22 . DOI: 10.30987/1999-8775-2021-6-11-22.

Статья поступила в редакцию 16.03.21.
Рецензент: д.т.н., доцент Оренбургского государственного университета,
Рассоха В.И.,
член редсовета журнала «Вестник БГТУ».
Статья принята к публикации 25.05.21.

Сведения об авторах:

Короткий Виктор Анатольевич, профессор кафедры «Инженерная и компьютерная графика», Южно-Уральский государственный университет, e-mail: ospolina@mail.ru.

Korotky Victor Anatolievich, Prof. of the Dep. "Engineering and Computer Graphics", South-Urals State University, e-mail: ospolina@mail.ru.

Витовтов Игорь Георгиевич, к. физ.-мат. н., доцент кафедры «Естественнонаучные дисциплины», Челябинский институт путей сообщения, e-mail: vitovtovig@gmail.com.

Vitovtov Igor Georgievich, Can. Sc. Phys.-Math., Assistant Prof. of the Dep. "Natural Science Subjects", Chelyabinsk Institute of Railway Transport, e-mail: vitovtovig@gmail.com.