

УДК 629.4.015:625.032.435:534.11

DOI: 10.30987/1999-8775-2020-9-35-46

А.Н. Скачков, В.В. Василевский, А.А. Юхневский

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КУЗОВА ПАССАЖИРСКОГО ВАГОНА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ НА ОСНОВЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЕГО ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Предлагается расчетно-экспериментальный метод определения низшей частоты изгибных колебаний кузова пассажирского вагона в вертикальной плоскости, на основе идентификации его изгибной жесткости для модели в виде балки Бернулли-Эйлера. Приводятся формулы для идентифициро-

ванных значений жесткости, а также формулы для приближенного вычисления частот.

Ключевые слова: расчетно-экспериментальный метод, изгибная жесткость, балка Бернулли-Эйлера, идентификация, частота изгибных колебаний.

A.N. Skachkov, V.V. Vasilevsky, A.A. Yukhnevsky

CALCULATION-EXPERIMENTAL METHOD FOR DEFINITION OF LOWEST FREQUENCY IN BENDING VIBRATIONS OF COACH CAR BODY IN VERTICAL PLANE BASED ON IDENTIFICATION OF ITS BENDING STIFFNESS

The consideration of existing methods for a modal analysis has shown a possibility for the lowest frequency definition of bending vibrations in a coach car body in a vertical plane based on an indirect method reduced to the assessment of the bending stiffness of the one-dimensional model as a Bernoulli-Euler beam with fragment-constant parameters.

The assessment mentioned can be obtained by means of the comparison of model deflections (rated) and a prototype (measured experimentally upon a natural body) with the use of the least-squares method that results in the necessity of the solution of the multi-dimensional problem with the reverse coefficient. The introduction of the hypothesis on ratability of real bending stiffness of the prototype and easily calculated

geometrical stiffness of a model reduces a multi-dimensional problem incorrect according to Adamar to the simplest search of the extremum of one variable function. The procedure offered for the indirect assessment of bending stiffness was checked through the solution of model problems. The values obtained are offered to use for the assessment of the lowest frequency of bending vibrations with the aid of Ritz and Grammel methods. In case of rigid poles it results in formulae for frequencies into which there are included directly the experimental values of deflections.

Key words: rated-experimental method, bending stiffness, Bernoulli-Euler beam, identification, frequency of bending vibrations.

Введение

Низшая частота изгибных колебаний (ЧИК) кузова пассажирского вагона в вертикальной плоскости является одним из основных параметров, характеризующих динамические качества пассажирского вагона [1]. Поэтому ее значение проверяется как теоретически на стадии проектирования [1], так и экспериментально после изготовления [2]. Существует ряд экспериментальных методов определения низшей ЧИК как при стендовых, так и при ходовых испытаниях. Стендовые испытания основаны на возбуждении колебаний с помощью вибромашины или с помощью точечного ударного нагружения. Использо-

вание вибромашины дает значительный разброс результатов из-за эффекта Зоммерфельда [3] и требует по этой причине специальных методов обработки. Ударное нагружение из-за неопределенности начальных условий соответствующего переходного процесса, а также его массовых и упруго-диссипативных параметров приводит к результатам, зависящим от способов обработки и от объемов выборки, так что репрезентативные выборки требуют для своей обработки использования суперкомпьютерных технологий [4]. В связи со сказанным, в настоящее время начинают распространяться прямые методы, ос-

нованные на гибридных технологиях, когда экспериментальные методы дополняются теоретическим модальным анализом – в основном с применением МКЭ [5-8]. При таких оценках динамики исходную КЭ-систему редуцируют, уменьшая (конденсируя) количество степеней свободы (СС) с использованием ряда критериев, которые регламентируются международными требованиями (*NSTC 14046 Revision E. Space Shuttle Program. Payload Verification Requirements. USA, NASA, 2000, 60 p.*) [9]. В основном редуцирование модели проводится на основе *MEM*-критерия (*Modal Effective Mass*), в соответствии с которым целевым модам должны соответствовать целевые массы, составляющие не менее 10% от соответствующих элементов матрицы инерции, а вторичным (но тоже удерживаемым) – элементы «5%». При этом погрешность (верификации) целевых мод не должна превышать 3...5%. Кроме того, при проведении конденсации учитывают *MAC*-критерий (*Modal Assurance Criterion*) модальной достоверности, который по своей сути – просто квадрат косинуса угла между соответствующими собственными векторами расчетных и экспериментальных форм. При этом для сохранения в КЭ-модели *i*-й СС необходимо, чтобы в *MAC*-матрице для *i*-го диагонального элемента выполнялось неравенство $MAC_{ii} \geq (0,85...0,9)$, а для остальных (удерживаемых) $MAC_{ij} \leq (0,1...0,15)$. Однако в [10] указывается, что полностью пола-

Обсуждение возможных подходов

В последующих рассуждениях будем исходить из того, что кузов является объектом, протяженным в одном направлении и, по этой причине, для него в качестве модели может использоваться одномерная балочная модель. Следует отметить, что аналогичный подход достаточно давно известен в ракетостроении [12], где он успешно используется для практических расчетов ([13] – ракета-носитель «Циклон-4», [14] – ракета «Ангара» и др.).

Теоретически описание линейной вязкоупругой модели в данном случае имеет вид:

гаться на конденсацию с помощью указанных (и ряда других) критериев нельзя – из-за неполного набора экспериментов это может привести к потере существенных СС. Предлагается задавать существенные СС в узлах-разделителях, удаление которых приводит к делению конструкции на ряд несвязных фрагментов. Описанные приемы отбраковки теоретических мод следует производить не только при гибридном подходе, но и при чисто теоретических оценках (в этом случае *MAC*-отбраковка сводится к определению взаимной ориентации целевых мод относительно остальных). Это необходимо потому, что МКЭ-подход дает весьма густой спектр, содержащий множество парциальных частот, не представляющих никакого практического интереса. Например, в [9] сообщается, что при проведении экспериментов для частот выше 35 Гц не удалось обнаружить ни одной предсказанной МКЭ-частоты: все они оказались парциальными и в эксперименте не верифицировались. Рассматриваемый гибридный подход является весьма дорогостоящим и требует специального технологического оборудования, а также специальных программных средств [11] и по этой причине малоприменим для проведения экспресс-оценок динамических характеристик кузова, в частности низшей ЧИК, которая является частотой общего изгиба всей конструкции.

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{u}} + \mathbf{B}\dot{\bar{u}} + \mathbf{C}\bar{u} = \bar{F}(t) \quad (1)$$

($\dot{}$) означает дифференцирование по времени), где $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – матрицы инерции, демпфирования и жесткости соответственно. Знание их значений позволяет предсказывать поведение $\bar{u}(t)$ (или $u(x)$) объекта. Любые параметры из (1) (а также их комбинации) могут служить объектами идентификации. При этом, в качестве данных для идентификации могут выступать обобщенные координаты из \bar{u} , так и некоторые наблюдаемые переменные \bar{y} (например ускорения), связанные с \bar{u} в

общем случае матричным соотношением [15]:

$$\bar{y} = \mathbf{H}\bar{u} \quad (2)$$

Проектируя \bar{u} из (2) на \bar{y} , подставляя \bar{u} в (1), получим уравнение связи наблюдаемых параметров с вектором состояния. Эта связь будет взаимнооднозначной только в случае совпадения порядков \bar{y} и \bar{u} , при невырожденной квадратной \mathbf{H} того же порядка и при точном знании всех величин. В остальных случаях, а их большинство) проектирование по (2) не является однозначным и его следует понимать в некотором обобщенном смысле, так что неизвестные коэффициенты из (1) не могут быть восстановлены однозначно. Такие обратные коэффициентные задачи [16] можно классифицировать по-разному: как количественную интерпретацию наблюдений (2), или распознавания, или диагностики – в зависимости от специфики области применения. В случае линейности (2) задача идентификации для (1) сводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) или интегральных уравнений, которые, в свою очередь, могут быть сведены к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{A}\bar{z} = \bar{v}. \quad (3)$$

Так как матрицы $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ в (1), (2) в общем случае прямоугольные, а количество наблюдений за \bar{y} или за \bar{u} произвольно, то идентификационные подходы позволяют конструировать множество моделей, и, следовательно, породить множество решений. В случае сведения задач к СЛАУ целесообразным является использование сингулярных разложений [17] – тогда количество учитываемых сингулярных собственных чисел можно трактовать как порядок задачи идентификации (аналог структурной идентификации - [15]). В связи с возможной множественностью решений возникает вопрос об адекватности. Наиболее общий подход в этом случае – это рассматривать идентификацию, как задачу оптимизации, сконструировав подходящий экстремальный функционал – скаляр или свертку нескольких критериев [18]. Самый популярный здесь подход –

использование принципа минимума взвешенной квадратичной невязки. Это удобно, т.к. для всякой задачи вида (3) существует обобщенное решение \bar{z} в смысле метода наименьших квадратов (МНК) [19]. Этим решением является уравнение Эйлера для функционала вида

$$J[\bar{z}] = (\bar{z}_* \mathbf{A}_* - \bar{v}_*) (\mathbf{A}\bar{z} - \bar{v}) \bar{\mu} \rightarrow \min \quad (4)$$

(*) – знак транспонирования),

где $\bar{\mu} = \{\mu_i\}, i = \overline{1, n}$ – вектор весовых множителей.

Это приводит к требованию равенства нулю производной Фреше [18]. Получаемое при этом решение является нормальным в норме Фробениуса (L_2), однако, оно может быть неустойчивым [20]. Для исключения неустойчивости применяют различные методы, из которых наиболее популярен метод регуляризации Тихонова [21]. Для задачи вида (3) этот метод предполагает разыскание

$$\bar{z}_* = \arg \min \left\{ \|\mathbf{A}\bar{z} - \bar{v}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{L}\bar{z}\|_2^2 \right\},$$

где $\|\cdot\|$ – норма Фробениуса, \mathbf{L} – оператор дифференцирования порядка p , который при $p = 0$ представляет собой единичную матрицу, что соответствует стандартной регуляризации по Тихонову.

Если считать справедливой гипотезу Базиля [22], то (1), в соответствии с правилом Виделера примет вид:

$$\mathbf{M}\bar{u}'' + \mathbf{C}\bar{u} = \bar{F}. \quad (5)$$

Для однородной СОДУ, соответствующей (5), полагая $\bar{u}(t) = \bar{u} \exp(i\omega t)$, получим уравнение для определения круговой частоты ω в виде:

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0, \quad (6)$$

что соответствует классической (при диагональной \mathbf{M}) или обобщенной проблеме собственных значений. Получение для кузова достаточно точных значений матрицы инерции \mathbf{M} не представляет трудностей, чего нельзя сказать о матрице жесткости \mathbf{C} . Существует большое количество работ, решающих задачу идентификации для (5) или (6), однако, если речь идет о низших модах, то, вместо (5) можно поставить статическую задачу идентификации:

$$\mathbf{C}\bar{u} = \bar{F}, \quad (7)$$

из которой и определять матрицу C .

Уравнения (1), (5) и (7) не накладывают никаких ограничений на вид функциональной зависимости $u(x)$ (и на его ее дискретный аналог \bar{u}), где x - координата вдоль оси вагона, а $u(x)$ - перемещение вдоль некоторой образующей (например, обвязки). В связи с этим, а также, учитывая сходство низших форм изгибных колебаний кузова с балочными модами, можно при решении задачи идентификации считать, что перемещения $\bar{u} = \{u_i\}$ могут быть описаны в рамках балочной модели, в частности в рамках ее простейшего вари-

анта – балки Бернулли-Эйлера. Конечно, при этом следует учитывать, что изгибная жесткость EJ вагона и EJ модели кузова в виде балки Бернулли-Эйлера на самом деле различны. EJ модели должно быть таким, чтобы обеспечить совпадение (в определенном смысле) свойств модели (балка) и прототипа (кузова). Выбрав в качестве родовых свойств идентификации совпадение поперечных прогибов прототипа и модели, будем определять матрицу жесткости C в (7) для модели в виде балки на двух жестких опорах (рис. 1).

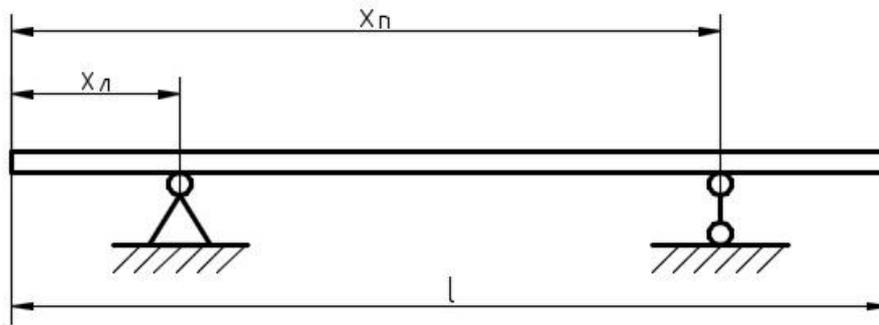


Рис 1. Расположение опор на схеме идентификации

Из сравнения очевидного равенства

$$\bar{u} = \|\delta_{ij}\| \bar{F}$$

с (6) следует, что

$$C = \|\delta_{ij}\|^{-1}, \quad i, j = \overline{1, p}, \quad (8)$$

где p - число точек идентификации, а δ_{ij} - прогибы u_i в точке (i) от единичной силы $P_j = 1$, приложенной в точке (j) . Поскольку для нахождения δ_{ij} достаточно знать геометрию одномерной модели, а также изгибную жесткость $D = EJ$, то можно сделать вывод, что для оценки низшей ЧИК достаточно произвести расчетно-экспериментальную оценку EJ . Практически достаточно, чтобы уравнения (6) – (8) позволяли оценивать третью частоту (для схемы на упругих опорах третья частота будет соответствовать низшей частоте колебаний общего изгибания). По самым пессимистическим прогнозам, для ее адекватной оценки достаточно рассмотреть систему с 6 СС, т.е. иметь 6 точек идентификации прогибов. При этом един-

ственным разумным предположением об изменении $D(x)$ является предположение о кусочном постоянстве D . В [23] приведено решение задачи в случае нагружения кузова сосредоточенными силами с помощью домкратов в ряде точек и замер возникающих при этом перемещений в ряде других точек. Сравнивая теоретические значения перемещений (u) вычисленных при определенных значениях (D) с замеренными перемещениями (v) и используя МНК для взвешенного функционала вида (4), находим значения изгибной жесткости. При поиске экстремума для (4) выяснилось, что из-за требования положительности (D) методы косвенной оптимизации становятся неэффективными и целесообразно применять прямые методы. При переходе к ним достаточно часто происходили попадания в локальные ямы. Возникновение множества ям объяснялось в основном тем, что приходилось работать с большими выборками зашумленных данных, объединяющих большое количество

замеров. Из-за этого приходилось перезапускать процессы поиска. Возникали проблемы с формулировкой критерия останова. Кроме того, по мере приближения к (гипотетическому) глобальному экстремуму возникали колебания – процесс рассыпался. К сожалению эта трудность для рассматриваемой задачи при многомерном поиске оказалась неустранимой. Это связано с предположением о кусочно-постоянном законе изменения (D), что в нашем случае не только разумно с точки зрения принципа однородной точности, но и согласуется с действительностью. В [24] доказывалось, что в случае идентификации негладких зависимостей (удовлетворяю-

щих, однако, условиям Дирихле) обычные методы, даже при малом уровне шумов не только приводят к осцилляциям результатов, но (в случае непринятия специальных мер) и дают отрицательные нефизические значения идентифицируемых параметров. Кроме того, при превышении усилиями от домкратов определенного значения (зависящего от точек его приложения) возможно нагружение контакта кузова с опорами, так что схема рис. 1 перестает соответствовать действительности [25]. В связи с этим схема нагружения для замеров прогиба была изменена и рассматривалась схема весовой догрузки кузова в соответствии с рис. 2.

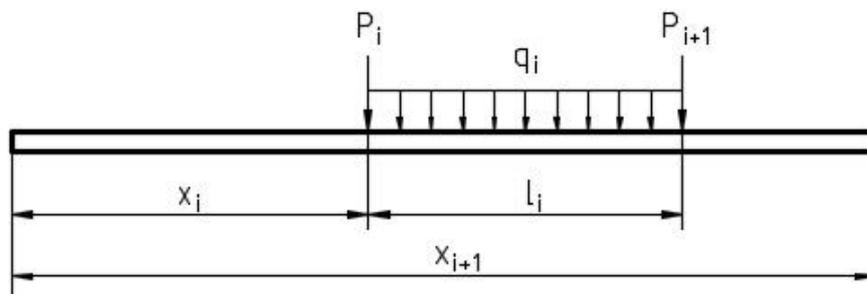


Рис. 2. Нагрузки, используемые при решении задачи идентификации

В эксперименте это соответствует замерам прогибов от некоторого дополнительного нагружения кузова вертикальной нагрузкой. Для регуляризации полученного решения обратной коэффициентной задачи использовалось два подхода. Первый основывался на корректировке элементов δ_{ij} из (8), найденных с использованием экспериментальных прогибов. Эти корректировки сводились к симметризации недиагональных δ_{ii} (они заменялись на $(\delta_{ij} + \delta_{ji})/2$), а затем к проверке положительной определенности получавшейся при этом матрицы. Для этого, в соответствии с критериями Сильвестра [27], проверялись угловые миноры M_i матрицы $\|\delta_{ij}\|$ и, если оказывалось, что $\det(M_i) < 0$, то элемент δ_{ij} наращивался до тех пор, по-

ка положительность не восстанавливалась. Более удачным оказался подход, основанный на возможности представления потенциальной энергии в виде суммы произведений слагаемых $(\theta_i D_i)$, где (θ_i) однозначно определяется геометрией и схемой нагружения модели [26]. В этом случае оказалось возможным свести задачу идентификации к общей задаче линейного программирования. Получаемое здесь решение зависело от разбиения модели на участки кусочно-постоянной жесткости (при прочих равных условиях). Это связано с тем, что значения (D) находятся с помощью проектирования параметров наблюдения (v) в пространство (D), а оценка качества этого проектирования производится с помощью функционала (4).

Основная часть

Сделаем попытку реально учесть структуру прототипа в нашей идентифика-

ционной модели. Специфика изменения жесткостей по длине кузова состоит в том,

что на нем обычно присутствует регулярная часть, в которой чередуются два элемента: оконный проем и простенок, что соответствует чередованию двух значений жесткости. Это означает, что количество перемен жесткости для кузова намного превышает количество несопадающих значений этой жесткости. В связи с этим оказывается целесообразным создание описателей чередования групп жесткости в виде числовой последовательности:

$$I_1(D), I_2(D), \dots, I_i(D), \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

где $I_i(D)$ - индекс группы жесткости для i -го участка схемы по рис. 2, а сами изгибные жесткости (D) образуют массив значений длиной (s). Заметим, что введение (9) не налагает никаких дополнительных ограничений на решение – просто в общем случае в последовательности (9) все числа оказываются различными.

Введем теперь достаточно разумное предположение о том, что фактическое (эффективное значение (D) с некоторой точностью прямо пропорционально геометрической жесткости поперечного сечения кузова, т.е. его моменту инерции относительно горизонтальной центральной оси:

$$\frac{D_i}{D_{\text{баз}}} = \frac{J_i^{\text{геом}}}{J_{\text{баз}}^{\text{геом}}} = f_i, \quad (10)$$

где (баз) означает любой ненулевой элемент, принятый в качестве базового. Примем это предположение и перейдем к решению задачи идентификации. Прогиб в любой точке x_v для схемы по рис.1 может быть вычислен по формуле:

$$u_v = \sum_{k=1}^n c_k J_{vk}, \quad c_k = \frac{1}{D_k}. \quad (11)$$

(n - число участков перемен жесткости).

J_{vk} из (11) в соответствии с теоремой Кастильяно может быть найден в виде интеграла:

$$J_{vk} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} M \overline{M}_v dx \quad (12)$$

где M - изгибающий момент от внешней нагрузки, включая моменты от реакции опор $R_{\text{л}}, R_{\text{п}}$, которые находятся так:

$$R_{\text{л}} = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_i - x_{\text{п}}) + \sum_{j=1}^n q_j l_j (e_j - x_{\text{п}}) \right];$$

$$R_{\text{п}} = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_{\text{л}} - x_i) + \sum_{j=1}^n q_j l_j (x_{\text{л}} - e_j) \right]; \quad (13)$$

$$\Delta = x_{\text{п}} - x_{\text{л}}; \quad e_j = x_j + l_j / 2.$$

Выражение для M на участке $[x_k, x_{k+1}]$ имеют вид:

$$M(x = [x_k, x_{k+1}]) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2, \quad (14)$$

где

$$m_0 = \frac{1}{2} q_k x_k^2 - \sum_{i=1}^k P_i x_i - \sum_{j=1}^{k-1} q_j l_j e_j;$$

$$m_1 = \sum_{i=1}^k P_i - \sum_{j=1}^{k-1} q_j l_j - q_k x_k; \quad (15)$$

$$m_2 = \frac{1}{2} q_k.$$

Момент \overline{M}_v от единичной силы $P_v = 1$, приложенной в точке $x = x_v$, строится в виде суммы трех линейных слагаемых:

$$\overline{M}_v = \overline{M}_v(x, x_v, 1) + \overline{M}_v(x, x_{\text{л}}, r_{\text{л}}) + \overline{M}_v(x, x_{\text{п}}, r_{\text{п}}), \quad (16)$$

где $\overline{M}_v(x, x_p, P)$ вычисляется по формуле:

$$\overline{M}_v(x, x_p, P) = \begin{cases} 0, & \forall x \leq x_p \\ P(x - x_p), & \forall x > x_p \end{cases} \quad (17)$$

При этом реакции $r_{\text{л}}, r_{\text{п}}$ из (6) находятся так:

$$r_{\text{л}} = \frac{1}{\Delta} (x_v - x_{\text{п}}), \quad r_{\text{п}} = \frac{1}{\Delta} (x_{\text{л}} - x_v). \quad (18)$$

На основании (14), (17) интеграл по (12) вычисляется следующим образом:

$$J_{vk} = \alpha_0 z_1 + \frac{\alpha_1}{2} z_2 + \frac{\alpha_2}{3} z_3 + \frac{\alpha_3}{4} z_4, \quad (19)$$

где $z_i = x_{k+1}^i - x_k^i$.

$$\alpha_0 = a m_0; \quad \alpha_1 = a m_1 + b m_0;$$

$$\alpha_2 = a m_2 + b m_1; \quad \alpha_3 = b m_2;$$

$$b = \frac{1}{z_1} [\overline{M}_v(x_{k+1}) - \overline{M}_v(x_k)];$$

$$a = \overline{M}_v(x_k) - b x_k. \quad (20)$$

Если у нас имеется (s) различных групп жесткости, то формула (11) с учетом (9) приобретает вид

$$u_v = \sum_{k=1}^s c_k \varphi_{vk}, \quad \varphi_{vk} = \sum J_{vj} (\forall c_j = c_k). \quad (21)$$

Сравнивая перемещения u_ν , $\nu = \overline{1, p}$ из (21) с перемещениями (v_ν) найденными экспериментально (или иным образом, не совпадающим с (21)) с помощью функционала вида (4), в который дополнительно введены весовые множители μ :

$$\mu_i = |v_i / \bar{v}_m|^e, \quad v_m = \max |v_i|, \quad i = \overline{1, p} \quad (22)$$

приходим к СЛАУ, из которой вектор $\bar{c} = \{c_i\}$, $i = \overline{1, s}$ определяется из матричного соотношения:

$$\bar{c} = A^{-1}\bar{b}, \quad A = \sum_{i=1}^s \mu_i \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_i^*, \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^s \mu_i v_i \bar{\varphi}_i \quad (23)$$

в котором вектор $\bar{\varphi}_i$ состоит из (s) компонентов φ_{ik} , вычисляемых по формуле (21).

Решение s -мерной задачи в виде (23) некорректно по Адамару и может быть регуляризовано так, как это было описано выше. Однако, если воспользоваться разумным предположением (10) и учесть, что формула (23) при $s=1$ всегда дает качественно (но не количественно) физически обоснованные результаты, то мы придем к одномерной задаче, имеющей решение, выражаемое формулой:

$$D_{\text{баз}}^{\text{эфф}} = \frac{\sum_{i=1}^p \eta_i^2 \mu_i}{\sum_{i=1}^p \mu_i \eta_i v_i}, \quad \eta_i = \sum_{k=1}^s \frac{\varphi_{ik}}{f_k}, \quad (24)$$

после чего идентифицированные значения изгибных жесткостей участков находятся по формуле, следующей из (10):

$$D_i = f_i D_{\text{баз}}^{\text{эфф}}. \quad (25)$$

Решение (24) – (25) имеет ту же точность, что и гипотеза (10). Это означает, что по (24) – (25) восстанавливаются значения D_i точно, если принять $f_i = 1$ (проверено на решении модельных задач).

Предложенная постановка снимает вопрос о возможной множественности решений, т.к. решение (24) не содержит параметра регуляризации. Однако, можно также сказать, что соотношения вида (10) являются естественными регуляризаторами и тогда решение (24) является однозначным с точностью до вектора регуляризации $\bar{f} = \{f_i\}$. Предложенное простое решение в некотором смысле близко к нор-

мативной методике 70-х годов. [28, с. 135-137], где определение низшей ЧИК сведено к рассмотрению системы с тремя СС для уравнения (6). При этом использовалось решение (24) для $s=1$, которое в этом случае при любом $\mu \neq 0$ дает $D_{\text{баз}}^{\text{эфф}} = f_i D$. Некоторая нелогичность методики [28] состоит в том, что теоретический прогиб (u) в середине кузова определяется от равномерно распределенной нагрузки q под брутто по схеме плоской безраскосной рамы (схема Никольского [29]), но затем интерпретируется как теоретический прогиб середины однородной балки Бернулли-Эйлера по рис.1:

$$u = \frac{ql^2}{24D} (5l^2 - 6a^2),$$

где $2l$ - база кузова, $(2l = x_n - x_n)$, a - длина консоли.

Кроме того, методика [28] предполагает, что $f_1 = 0,625$, делая тем самым ненужным экспериментальный этап. Имевшийся тогда опыт определения низшей ЧИК, позволяет сделать вывод, что указанная выше нелогичность компенсировалась выбором числового значения f_1 . Наверное в настоящее время подход, основанный на использовании фиксированных значений даже вектора \bar{f} не является вполне оправданным из-за быстро меняющейся номенклатуры моделей.

После нахождения значений изгибной жесткости несколько ЧИК может быть найдено стандартными методами. При этом следует иметь в виду, что идентификация проводилась для схемы балки Бернулли-Эйлера с кусочно-постоянной жесткостью, имеющей, однако, прямолинейную ось, на которой расположены центры тяжести всех поперечных сечений.

Полученные значения прогибов могут быть использованы для предварительных оценок низшей ЧИК без проведения громоздких расчетов. Для этого следует перейти от дискретно-континуального распределения масс (аналогично рис. 2) к дискретному с сосредоточенными массами m_i , $i = \overline{1, p}$ (p - количество узлов с заданными прогибами) и принять, что форма

колебаний подобна экспериментальной кривой статического деформирования. После этого для схемы опирания по рис. 1, приравнявая работу сил тяжести $m_i g$ кинетической энергии, получим для низшей ЧИК выражения:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gJ_1 / J_3, \\ J_1 &= \sum_i m_i v_i, \quad J_2 = \sum_i m_i x_i v_i, \\ J_3 &= \sum_i m_i v_i^2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= S_0 S_2 - S_1^2, \quad a_1 = \frac{1}{2a_0} (c_2 S_0 + c_0 S_2 - 2c_1 S_1), \quad a_2 = \frac{\Delta_1}{a_0}, \\ S_k &= \sum_i m_i x_i^k, \quad c_i = k_n x_n^i + k_l x_l^i, \quad \Delta_1 = c_0 c_2 - c_1^2. \end{aligned}$$

Жесткие статические перемещения для схемы на упругих опорах также имеют вид (27), причем:

$$\begin{aligned} a &= \frac{g}{\Delta_1} (c_2 S_0 - c_1 S_1), \\ b &= \frac{g}{\Delta_1} (c_2 S_1 - c_1 S_0), \end{aligned}$$

где g - ускорение свободного падения.

Если теперь представить форму колебаний схемы на упругих опорах в виде:

$$u_y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + u_3, \quad (29)$$

где $u_{1,2} = \alpha_{1,2} + x$ - нормированные формы колебаний подпрыгивания и галопирования:

$$\alpha_{1,2} = \frac{c_1 - \omega_{1,2}^2 S_1}{\omega_{1,2}^2 S_0 - S_1},$$

а $\varphi_{1,2}$ - коэффициенты распределения амплитуд для жестких форм, удовлетворяющие требованию

$$\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 = u,$$

(u находится по (27)), а также условие ортогональности скелетных схем:

$$\sum_i m_i u_j(x_i) u_k(x_i) = 0, \quad j \neq k, \quad (30)$$

откуда получается (например, с помощью МНК):

$$\varphi_1 = \frac{a - b\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}; \quad \varphi_2 = b - \varphi_1.$$

где x_i, v_i - абсциссы и экспериментальные ординаты статического прогиба.

Если в точках (x_l, x_n) расположены линейно-упругие опоры с жесткостями (k_l, k_n) , то, представив жесткие (без деформаций) перемещения в виде:

$$u = a + bx, \quad (27)$$

получим для частот подпрыгивания галопирования:

$$\omega_{1,2}^2 = a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= S_0 S_2 - S_1^2, \quad a_1 = \frac{1}{2a_0} (c_2 S_0 + c_0 S_2 - 2c_1 S_1), \quad a_2 = \frac{\Delta_1}{a_0}, \\ S_k &= \sum_i m_i x_i^k, \quad c_i = k_n x_n^i + k_l x_l^i, \quad \Delta_1 = c_0 c_2 - c_1^2. \end{aligned}$$

Если после этого считать, что (u_3) в (29) представляет собой экспериментальную статическую форму (v) , то приходим к частотному уравнению вида (6) для матриц 3-го порядка, причем:

$C = \text{diag}((k_l u_{1n}^2 + k_n u_{1n}^2), (k_n u_{2n}^2 + k_n u_{2n}^2), gJ_1)$, а элементы \bar{m}_{ij} матрицы M имеют вид:

$$\bar{m}_{ij} = \sum_k m_k u_i(x_k) u_j(x_k)$$

(при этом вследствие (30) будет $\bar{m}_{12} = 0$).

Описанные вычисления соответствуют процедуре Ритца и приводят к завышенным значениям частот. Значительно более точные результаты можно получить, используя метод Граммеля [30]. В этом случае вместо формулы (26) для схемы на жестких опорах получим:

$$\omega^2 = \frac{3DJ_2}{\sum_k \sigma_k}, \quad D = \frac{g}{3J_1} \sum_k \sigma_k, \quad (31)$$

где $\sigma_k = (x_{k+1} - x_k)(\bar{M}_k^2 + \bar{M}_{k+1}^2 + \bar{M}_k \bar{M}_{k+1})$,

причем значения \bar{M}_k вычисляются по формулам (16)-(18) для $P = m_i$.

В случае упругих опор метод Граммеля вместо (6) приводит к уравнению с матрицами 3-го порядка:

$$\det(C - \omega^2 M_2 + \omega^4 M_4) = 0,$$

где:

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_0 & c_1 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} c_2 & \end{matrix} \\ & \end{matrix} ; \quad \mathbf{M}_4 = \frac{1}{D} \mathbf{Q} * \mathbf{\Sigma} \mathbf{Q} ; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{matrix} \begin{matrix} S_0 & S_1 & J_1 \\ S_1 & S_2 & J_2 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (32)$$

(неуказанные элементы в таблице для матрицы \mathbf{C} равны нулю).

При этом (D) вычисляется по (31), (J) - по (26), (S) - по (29), в $n \times 3$ ($n = p$) матрице \mathbf{Q} первый столбец состоит из единиц, второй – из координат сосредото-

ченных масс, а третий представляет собой вектор экспериментальных значений перемещений. Матрица $\mathbf{\Sigma}$ состоит из элементов σ_{ij} , которые представляют собой интегралы:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{P-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{M}_i \bar{M}_j, \quad \binom{m}{n} = \bar{M}_i(x_m) \bar{M}_j(x_n),$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{M}_i \bar{M}_j = (x_{k+1} - x_k) \left\{ \frac{1}{3} \left[\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k+1} \right] + \left[\binom{k}{k+1} + \binom{k+1}{k} \right] \right\},$$

причем \bar{M}_i, \bar{M}_j вычисляются по формулам (16)-(18) для $P_i = m_i, P_j = m_j$.

Выводы

1. На основе рассмотрения существующих методов модального анализа различных машиностроительных конструкций сделан вывод о возможности косвенной оценки низшей частоты изгибных колебаний кузова пассажирского вагона в вертикальной плоскости.

2. С учетом специфики конструкции предложено для нахождения низшей частоты производить расчетно-экспериментальную оценку изгибной жесткости ($D = EJ$) кузова, представляя его в виде одномерной балки Бернулли-Эйлера с кусочно-постоянными значениями (D). Правомерность такого подхода основана на идентичности матричных уравнений, описывающих динамическое поведение различных конструкций.

3. Для упрощения решения предложено использовать тот факт, что для пассажирского вагона количество перемен значений (D) по длине кузова значительно больше количества различных числовых значений жесткости.

4. Использование метода наименьших квадратов при сравнении поперечных перемещений модели (расчетных значе-

ний) и прототипа (экспериментальные значения на натурном кузове) сводит задачу идентификации значений (D) к многомерной обратной коэффициентной задаче.

5. Предложена гипотеза о пропорциональности фактического значения (D) прототипа легко вычисляемому геометрическому значению (D) модели, что позволило свести многомерную обратную коэффициентную задачу (неустойчивую по Адамару) к элементарной задаче поиска экстремума функции одной переменной.

6. Предложенный алгоритм использовался при решении модельных задач, в которых вычислялись перемещения от поперечных нагрузок для схемы с заданными значениями (D), а затем эти перемещения использовались в качестве исходных данных для алгоритма идентификации. Вычисления показали высокую точность предложенного подхода.

7. Предложены простые соотношения для оценки низшей частоты изгибных колебаний, основанные на методиках Ритца и Граммеля, использующие полученные значения кусочно-постоянной жесткости. При этом формула для частоты схемы на жест-

ких опорах (формула (26) вообще не требует решения задачи идентификации – в

нее напрямую входят экспериментальные значения прогибов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 34093-2017. Вагоны пассажирские локомотивной тяги. Требования к прочности и динамическим качествам.
2. ГОСТ 33788-2015 Вагоны грузовые и пассажирские. Методы испытания на прочность и ходовые качества.
3. Василевский, В.В. Нелинейные эффекты взаимодействия кузова вагона с вибромашинной при определении частоты изгибных колебаний / В.В. Василевский, И.Д. Гончаров, А.Н. Скачков // Транспорт, наука, образование, производство: сб. науч. тр.; Технические науки. Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д: Издательство РГПУ, 2018. – Т. 2. – С. 36-40.
4. Абросимов, Н.А. Определение параметров моделей нелинейного деформирования изотропных и композитных материалов по результатам расчетно-экспериментального анализа импульсного нагружения круглых пластин / Н.А. Абросимова, Н.А. Куликова // Прикладная механика и техническая физика. - 2011. - Т.52. - № 1. - С. 163-172.
5. Межин, В.С. Практика применения модальных испытаний для целей верификации конечно-элементных моделей конструкции изделий ракетно-космической техники / В.С. Межин, В.В. Обухов // Космическая техника и технологии. - 2014. - № 1(4). - С. 86-91.
6. Ашуркова, С.Н. Применение современных элементов САПР для анализа напряженно-деформированного состояния несущих конструкций кузовов пассажирских вагонов / С.Н. Ашуркова, Д.Я. Антипин // САПР и моделирование в современной электронике: сб. науч. тр. 2-й Междунар. науч.-практ. конф.; под ред. Л.А. Потапова, А.Ю. Дракина. – Брянск: БГТУ, 2018. – Ч.2. – С.10-13.
7. Антипин, Д.Я. Обоснование динамических моделей для анализа нагруженности несущих конструкций кузовов пассажирских вагонов / Д.Я. Антипин, С.Н. Ашуркова, Е.В. Чепикова // Будущее машиностроения России: сб. докл. 9-й Всерос. конф. молодых ученых и специалистов. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – С.695-697.
8. Ашуркова, С.Н. Использование современных промышленных программных комплексов для обоснования рациональной конструкции боковых стен пассажирских вагонов / С.Н. Ашуркова, Д.Я. Антипин // Информационно-телекоммуникационные системы и технологии: сб. Всерос. науч.-практ. конф. – Кемерово, 2015. – С. 243.
9. Авершьев, А.С. Процедура проведения уточненной верификации подробных конечно-элементных моделей конструкций ракетно-космической техники для анализа динамических нагружений в полете на примере транспортного грузового корабля «Прогресс» / А.С. Авершьев, С.С. Бобылев, К.А. Филин // Космическая техника и технологии. – 2018. - № 1(20). - С. 40-53.
10. Ромашин, В.Н. Суперэлементная формулировка метода частотно-динамической конденсации / В.Н. Ромашин // Интернет-вестник ВолгГАСУ, сер. Политехническая. - 2013. - вып.1(25). -18 с.
11. Хейлен, В. Модальный анализ. Теория и испытания / Вард Хейлен, Стефан Ламменс, Пол Сас. – М.: Новатест, 2010. - 319 с.
12. Колесников, К.С. Динамика ракет / К.С.Колесников. – М.: Машиностроение, 2003. - 520 с.
13. Конохов, А.С. Исследование динамических характеристик ракеты-носителя «Циклон-4» на основе континуальной стержневой модели / А.С. Конохов, А.С. Цыбенко, А.С. Рыбалка // Проблемы прочности. - 2015. - № 4. - С. 26-30.
14. Селиверстов, А.И. Уточнение расчетной динамической модели элемента ракеты-носителя по результатам испытаний сбросом статических сил // А.И. Селиверстов, И.В. Шевченко // Технические науки – от теории к практике. - 2013. - № 20. - С. 73-81.
15. Иванов, В.Н. Численная идентификация параметров динамического поведения элементов машиностроительных конструкций / В.Н. Иванов, И.В. Домбровский, И.Л. Шевелев // Вычислительная механика сплошных сред. - 2011. - Т. 4. - № 3. - С. 58-67.
16. Ватулья, А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О.Ватульян. - М.: Физматгиз, 2007. - 223 с.
17. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ван Лоун Ч. - М.: Мир, 1999. - 548 с.
18. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.Л. Артохин, С.В. Румянцев. - М.: Наука, 1988. - 288 с.
19. Тихонов, А.Н. О методах автоматизации обработки наблюдений / А.Н.Тихонов // Вестник АН СССР. -1983. - Т. 1. - С. 14-25.
20. Тихонов, А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений / А.Н.Тихонов // Журнал вычислительной математики и математ. физики. - 1980. - Т. 20. - № 6. - С. 1373-1383.
21. Постнов, В.А. Использование метода регуляризации Тихонова для решения задачи идентификации упругих систем / В.А. Постнов // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2010. - № 1. - С 64-71.
22. Бернс, В.А. Идентификация диссипативных свойств конструкции по результатам экспериментального модального анализа / В.А. Бернс, Е.П. Жуков, Д.А. Маринин // Вестник МГТУ им. Баумана, сер. Машиностроение. - 2016. - № 4. - С. 4-23.

23. Василевский, В.В. Идентификация изгибной жесткости кузова пассажирского вагона теоретико-экспериментальным методом / В.В. Василевский, А.Н. Скачков, А.А. Юхневский // Проблемы и перспективы развития вагоностроения: сб. науч. тр 8-й Всерос. науч.-техн. конф. (18-19 апреля 2019 года). – Курск, Изд-во ЮЗГУ, 2019. – С. 36-39.
24. Морозов, В.А. Метод дескриптивной регуляризации и качество приближенных решений / В.А. Морозов, И.Л. Гольдин, М.К. Самарин // Инженерно физический журнал. - 1977. - Т. 33. - № 6. - С. 1117-1120.
25. Василевский, В.В. Эффект односторонности опирания при определении частоты колебаний пассажирского вагона / В.В. Василевский, А.Н. Скачков // Транспорт, наука, образование, производство: сб. науч. тр. / Технологические науки. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГПУ, 2018. – Т. 2. - С.41-44.
1. GOST 34093-2017. *Passenger Cars for Locomotive Traction. Requirements to Strength and Dynamic Qualities.*
2. GOST 33788-2015 *Freight and Passenger Cars. Methods for Strength and Ride Performance Tests.*
3. Vasilevsky, V.V. Nonlinear effects of interaction of car body and vibrator at definition of bending vibration frequency / V.V. Vasilevsky, I.D. Gonchakov, A.N. Skachkov // *Transport, Science, Education, Production: Proceedings; Engineering Sciences. Rostov State University of Communications.* – Rostov-upon-Don: RSTU Publishers, 2018. – Vol.2. – pp. 36-40.
4. Abrosimov, N.A. Parameter definition of isotropic and composite material nonlinear deformation models on results of rated-experimental analysis of round plate pulse loading / N.A. Abrosimova, N.A. Kulikova // *Applied Mechanics and Engineering Physics.* – 2011. – Vol.52. – No.1. – pp. 163-172.
5. Mezhin, V.S. Practice of modal test use for verification purposes of finite element models of rocket-space product design / V.S. Mezhin, V.V. Obukhov // *Space Engineering and Technology.* – 2014. – No.1(4). – pp. 86-91.
6. Ashurkova, S.N. Modern CAD element use for analysis of bearing structure stress-strain state in passenger car bodies / S.N. Ashurkova, D.Ya. Antipin // *CAD and Modeling in Modern Electronics: Proceedings of the 2-d Inter. Scientific-Practical Conf.; under the editorship of L.A. Potapov, A.Yu. Drakin.* – Bryansk: BSTU, 2018. – Part 2. – pp. 10-13.
7. Antipin, D.Ya. Substantiation of dynamic models for analysis of bearing structure loading in passenger car bodies / D.Ya. Antipin, S.N. Ashurkova, E.V. Chepikova // *Mechanical Engineering Future of Russia: Proceedings of the IX-th All-Russian Conf. of Young Scientists and Experts.* – Moscow: Publishing House of Bauman STU of Moscow, 2016. – pp. 695-697.
26. Василевский, В.В. Расчетно-экспериментальный метод оценки изгибной жесткости кузова пассажирского вагона для последующей оценки низшей частоты изгибных колебаний / В.В. Василевский, А.Н. Скачков, А.А. Юхневский // Тр. Ростовского гос. ун-та путей сообщения. - 2019. - № 4(49). - С.34-37.
27. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович. – М.: Наук, 1967. - 472с.
28. Нормы для расчетов на прочность и проектирование механической части новых и модернизированных вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – М., 1971. -180 с.
29. Никольский, Е.Н. Оболочки с вырезами типа вагонных кузовов / Е.Н.Никольский. - М.: Машгиз, 1963. - 312 с.
30. Биецено, К.Б. Техническая динамика / К.Б. Биецено, Р. Граммель. – Л.; М.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1. - 900 с.
8. Ashurkova, S.N. Modern industrial program complex use for efficient design substantiation of passenger car sidewalls/ S.N. Ashurkova, D.Ya. Antipin // *Information-telecommunication Systems and Technologies: Proceedings of the All-Russian Scientific-Practical Conf.* – Kemerovo, 2015. – pp. 243.
9. Avershiev, A.S. Improved verification procedure of thorough finite-element models of rocket-space equipment models for analysis of dynamic loading in flight by example of transport cargo “Progress” spaceship / A.S. Avershiev, S.S. Bobylev, K.A. Filin // *Space Engineering and Technologies.* – 2018. – No.1 (20). – pp. 40-53.
10. Romashin, V.N. Super-element formulation of frequency-dynamic condensation method / V.N. Romashin // *VolgaGASU Internet-Bulletin, Polytechnic Series.* – 2013. – Issue 1(25). – pp. 18.
11. Heilen, V. *Modal Analysis. Theory and Tests* / Vard Heilen, Stephan Lammens, Paul Sas. – М.: Novatest, 2010. – pp. 319.
12. Kolesnikov, K.S. *Rocket Dynamics* / K.S. Kolesnikov. – М.: Mechanical Engineering, 2003. – pp. 520.
13. Konyukhov, A.S. Dynamic characteristics investigation of “Cyclon-4” launcher based on continual core model / A.S. Konyukhov, A.S. Tsybenko, A.S. Rybalka // *Problems of Strength.* – 2015. – No.4. – pp. 26-30.
14. Seliverstov, A.I. Rated dynamic model updating of launch vehicle element on test results by static forces dump // A.I. Seliverstov, I.V. Shevchenko // *Engineering Sciences – from Theory to Practice.* – 2013. – No.20. – pp. 73-81.
15. Ivanov, V.N. Numerical identification of dynamic behavior parameters in engineering structure elements / V.N. Ivanov, I.V. Dombrovsky, I.L. Shevelev // *Computer Equipment of Continuum.* – 2011. – Vol. 4. – No.3. – pp. 58-67.

16. Vatuliyana, A.O. *Inverse Problems in Mechanics of Deformable Solid* / A.O. Vatuliyana. – M.: Physmathgiz, 2007. – pp. 223.
17. Golub, J. *Matrix Calculations* / J. Golub, Van Loun Ch. – M.: Mir, 1999. – pp. 548.
18. Alifanov, O.M. *Extreme Methods for Incorrect Problem Solution* / O.M. Alifanov, E.L. Artokhin, S.V. Romyantsev. – M.: Science, 1988. – pp. 288.
19. Tikhonov, A.N. On methods of observation processing automation / A.N. Tikhonov // *Bulletin of AS of the USSR*. – 1983. – Vol.1. – pp. 14-25.
20. Tikhonov, A.N. On approximated systems of linear algebraic equations / A.N. Tikhonov // *Journal of Computer Mathematics and Mathematical Physics*. – 1980. – Vol.20. – No.6. – pp. 1373-1383.
21. Postnov, V.A. Use of Tikhonov's regulation method to solve problems of elastic system identification / V.A. Postnov // *Proceedings of RAS. Mechanics of Solid*. – 3010. – No.1. – pp. 64-71.
22. Berns, V.A. Identification of structure dissipative properties on results of experimental modal analysis / V.A. Berns, E.P. Zhukov, D.A. Marinin // *Bulletin of Bauman STU of Moscow, Mechanical Engineering Series*. – 2016. – No.4. – pp. 4-23.
23. Vasilevsky, V.V. Bending stiffness identification of passenger car body by theoretical-experimental method / V.V. Vasilevsky, A.N. Skachkov, A.A. Yukhnevsky // *Problems and Outlooks of Car Building Development: Proceedings of the 8-th All-Russian Scientif.-Tech. Conf. (April 18-19, 2019)*. – Kursk, SWSU Publishers, 2019. – pp. 36-39.
24. Morozov, V.A. method of descriptive regulation and quality of approximated solutions / V.A. Morozov, I.L. Goldin, M.K. Samarin // *Engineering Physical Journal*. – 1977. – Vol.33. – No.6. – pp. 1117-1120.
25. Vasilevsky, V.V. Effect of resting one-sidedness at oscillation frequency definition of passenger car / V.V. Vasilevsky, A.N. Skachkov // *Transport. Science. Education. Production: Proceedings / Engineering Sciences*. – Rostov-upon-Don: RSPU Publishers, 2018. – Vol.2. – pp. 41-44.
26. Vasilevsky, V.V. Estimated-experimental method for assessment of passenger car body bending stiffness for further assessment of bending vibration lowest frequency / V.V. Vasilevsky, A.N. Skachkov, A.A. Yukhnevsky // *Proceedings of Rostov State University of Communications*. – 2019. – No.4 (49). – pp. 34-37.
27. Demidovich, B.P. *Lectures on Mathematical Theory of Stability* / B.P. Demidovich. – Science, 1967. – pp. 472.
28. Standards for Strength Calculation and Design of Mechanical Part of New and Updated Cars of Railways of MC with 1520mm gauge (non-selfpropelled). – M.: 1971. – pp. 180.
29. Nikolsky, E.N. *Shells with Cuts of Car Body Type* / E.N. Nikolsky. – M.: Mashgiz, 1963. – pp. 312.
30. Bietseno, K.B. *Engineering Dynamics* / K.B. Bietseno, R. Grammel. – L.: M.: Gostechizdat, 1950. – Vol.1. – pp. 900.

Ссылка для цитирования:

Скачков, А.Н. Расчетно-экспериментальный способ определения низшей частоты изгибных колебаний кузова пассажирского вагона в вертикальной плоскости на основе идентификации его изгибной жесткости / А.Н.

Скачков, В.В. Василевский, А.А. Юхневский // *Вестник Брянского государственного технического университета*. – 2020. – № 9. – С. 35-46. DOI: 10.30987/1999-8775-2020-9-35-46.

Статья поступила в редакцию 26.05.20.

Рецензент: д.т.н., профессор, Брянского государственного технического университета

Кобищанов В.В.,

член редсовета журнала «Вестник БГТУ».

Статья принята к публикации 31.08.20.

Сведения об авторах:

Скачков Александр Николаевич, к.т.н., директор, ЗАО «Научная организация «Тверской институт вагоностроения». e-mail: info@tiv.ru.

Василевский Виктор Валентинович, ст. науч. сотрудник, ЗАО «Научная организация «Тверской

Skachkov Alexander Nikolayevich, Can. Sc. Tech., Director, Close Corporation, Scientific Company “Tver Institute of Car Building”, e-mail: info@tiv.ru.

Vasilevsky Victor Valentinovich, Senior research assistant, Close Corporation, Scientific Company “Tver

институт вагоностроения». e-mail: info@tiv.ru.

Юхневский Алексей Алимпиевич, к.т.н., ст. науч. сотрудник, ученый секретарь, ЗАО «Научная организация «Тверской институт вагоностроения». e-mail: info@tiv.ru.

Institute of Car Building”, e-mail: info@tiv.ru.

Yukhnevsky Alexey Alimpievich, Can. Sc. Tech., Senior research assistant, Academic secretary, Close Corporation, Scientific Company “Tver Institute of Car Building”, e-mail: info@tiv.ru.