УДК 621
DOI: 10.12737/article_59353e29d22508.11477409

О.Н. Дмитроченко

РАСШИРЕННЫЙ ДЕСЯТИЧНЫЙ НОМЕНКЛАТУРНЫЙ КОД *DNCM* ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрена модификация ранее разработанного десятичного номенклатурного кода *DNCM* для описания и классификации произвольного конечного элемента. Предложена новая система классификации, описывающая неохваченные ранее большие группы элементов сложной геометрии и кинематики.

Ключевые слова: конечный элемент, классификация, номенклатура, десятичный код.

O.N. Dmitrochenko

EXTENDED DECIMAL NOMENCLATURE *DNCM* CODE FOR DESCRIPTION OF ARBITRARY FINITE ELEMENT

The purpose of the work – extension of a systematic classification of finite elements offered earlier by the author with the purpose of inclusion in it new types of elements with a complex kinematic structure.

There is offered a modification of a decimal nomenclature *dncmkot* code of finite elements. The code is based on the presentation of geometry and structure of unit coordinates by a set of integral parameters: *d* – dimensionality, *n* – unit number, c – structure and number of coordinates in a unit, *m* – polynomial number. It is emphasized that there is a wide class of elements which does not fall under this classification. In these elements there is first introduced an intermediate element and then a linear transformation between them.

It is offered to designate for some wide groups of elements one or some parameters – *n, c, m* and others having a clear sense which modify a procedure of the formation of functions of an element form. There are shown examples of the description of elements with a complex kinematic structure on the basis of the offered modification of a decimal code.

The offered modified decimal nomenclature code of finite elements allows describing the existing and creating new finite elements of a wide class according to the specified *dncmkot* code.

Key words: finite element, classification nomenclature, decimal code .

Введение

Данная статья посвящена новому способу построения универсальной классификации конечных элементов и является продолжением и обобщением работы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Идея введения десятичного номенклатурного кода в виде *dncm* с произвольными положительными разрядами *d*, *n*, *c*, *m* и т.д. была впервые предложена в работе 6]. В сформированном и законченном виде этот материал был сформулирован как формальный алгоритм в работе **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Однако конечные элементы настолько разнообразны, что эта процедура требует модификации для учёта всех особенностей, возникающих в приложениях.

В работе 8] ранее были рассмотрены более сложные элементы. Их общая особенность такова: они обладают неким набором узловых координат *Z*, который формально соответствует некоторому коду *dncm*. Однако кинематика такого элемента требует, чтобы сперва был создан вспомогательный элемент ($d\eta\varsigma\mu$) с использованием другого числа узлов η и кинематических параметров ς, μ, обладающий другим набором узловых координат $\check{Z}$. После этого некоторое линейное преобразование *T* над координатами приводит к элементу, который можно систематически обозначить $dncm\,(d\eta\varsigma\mu)\{\check{Z}=T(Z)\}$ и назвать расширенным десятичным кодом, как было предложено в работе 8]. Эта нотация значительно расширяет круг охватываемых элементов, но получает также и недостаток в виде потери лаконичности записи в отличие от исходной *dncm*.

В данной статье впервые делается попытка вернуть расширенному коду лаконичность исходного кода *dncm*, а именно: для обозначения специальных групп элементов, имеющих широкое применение в приложениях, параметрам *n*, *c*, *m* и т.д. разрешается принимать также и отрицательные значения, которые имеют чётко определённый смысл и влияют определённым образом на формальную процедуру построения элементов.

1. Базовые элементы вида *dncm*

Большинство примеров, используемых в данной статье, связаны с двухмерными элементами. Поэтому идея десятичного кода *dncm* будет приведена только для них, без ущерба для общности в других случаях, описанных в предшествующей статье **Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Для обозначения конечных элементов вводится базовая трёхразрядная номенклатура *dnc*, содержащая следующие целые параметры:

d – размерность элемента, здесь *d* = 2;

n – число узлов элемента;

c – параметр, описывающий число и структуру координат в каждом узле.

Код *dnc* описывает элемент с *n* узлами, в которых введено *c* координат в узле. Данное обозначение может быть расширено до $d\,{}^{n\;c}_{\eta\;\varsigma}$, если добавлены η узлов на сторонах элемента, каждый из которых имеет ς узловых координат. Также используются расширения $d\,\begin{smallmatrix} n & c\\ \eta & \varsigma\\ \pi & \sigma\end{smallmatrix}$ и даже $d\,\begin{smallmatrix} n & c\\ \eta & \varsigma\\ \pi & \sigma\\ \nu & \zeta\end{smallmatrix}$ для двух- и трёхмерных элементов, в которых введены дополнительные π узлов на гранях элемента и ν узлов в объёме трёхмерного элемента; σ и ζ – параметры, определяющие узловые координаты в соответствующих группах узлов. Обозначение $d\,{}^{n\,c}_{\cdots}$ позволяет непосредственно определить число степеней свободы элемента *D* согласно следующему правилу:

$$D = |n|\,C(c) + |\eta|\,C(\varsigma) + |\pi|\,C(\sigma) + |\nu|\,C(\zeta)\,. \qquad (1)$$

Числа узлов в формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.** взяты по модулю, потому что в общем случае они могут быть отрицательными (для обозначения специальных случаев). Функция *C*(*c*) задана ниже соотношениями (4) и показывает, сколько узловых координат соответствует коду *c*.

Интерполяционный полином произвольного двухмерного элемента с кодом $2\begin{smallmatrix} nc\\ \eta\varsigma\\ \pi\sigma\end{smallmatrix}$ зависит от двух локальных координат *x* и *y* и может быть записан таким образом:

$$Z^{2\begin{smallmatrix} nc\\ \eta\varsigma\\ \pi\sigma\end{smallmatrix}}(x,y) = \sum_{k=0}^{D-1} a_{k+1} x^{\alpha_{Dk}^{21}} y^{\alpha_{Dk}^{22}} = \underbrace{\{x^{\alpha_{D0}^{21}} y^{\alpha_{D0}^{22}} \;\; x^{\alpha_{D1}^{21}} y^{\alpha_{D1}^{22}} \;\; \ldots \;\; x^{\alpha_{D,D-1}^{21}} y^{\alpha_{D,D-1}^{22}}\}}_{\mathbf{x}(x,y)} \cdot \underbrace{\{a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_D\}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{a}} = \mathbf{x}(x,y)\cdot\mathbf{a}\,, \qquad (1)$$

где α_{Dk}^{21}, α_{Dk}^{22} – показатели степеней полиномиальных членов из матрицы, определённой в работе **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]; индекс *k* пробегает диапазон $0, \ldots, D-1$. В той же работе показано, что элементы этой матрицы могут быть вычислены согласно несложному алгоритму:

$$g = \left\lfloor \left(\sqrt{1+8(k+1)}-1\right)/2 - 1 \right\rfloor; \qquad d = \left\lfloor \left(\sqrt{1+8D}-1\right)/2 - 1 \right\rfloor;$$

$$k_0 = g(g+1)/2; \qquad k_{12} = \{D=12\}\{d=g\};$$

$$B = \left\lfloor (k_0 + g - k - k_{12})/2 \right\rfloor; \qquad M = ((k_0 + g - k - k_{12}) \bmod 2)\cdot(1 - \{d=g\}\{d=k+1\});$$

$$\alpha_{Dk}^{21} = (1-M)B + M(g-B);$$

$$\alpha_{Dk}^{22} = (1-M)(g-B) + MB \equiv g - \alpha_{Dk}^{21}.$$

1.1. *Граничные условия в узлах элемента*

Полиномиальные коэффициенты a_k в формуле (1) определяются из граничных условий. Они формулируются в каждом узле элемента с индексом *i*; в каждом таком узле может быть введено одно граничное условие (или более) с индексом j. Каждое условие подразумевает, что значение производной определённого порядка от полинома Z в данном узле должно быть равно узловой координате. Таким образом, в самом общем случае, рассматриваемом в данной работе, следующая система линейных уравнений может быть записана с использованием предварительно подготовленных массивов E_{ij} и B_{lk} (матрица перемешивания узловых координат, которая чаще всего равна единичной):

$$\begin{array}{l} l=0 \\ \text{для } i=1,\ldots,N \\ \quad \text{для } j=0,\ldots,\dim[E_i]-1 \\ \quad\quad l=l+1 \end{array} \qquad \left. \frac{\partial^{\alpha^{21}_{DE_{ij}}+\alpha^{22}_{DE_{ij}}} Z^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)}{\partial x^{\alpha^{21}_{DE_{ij}}} \partial y^{\alpha^{22}_{DE_{ij}}}} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{k=1}^{D} B_{lk} z_k \equiv \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=0}^{\dim[E_r]-1} B_{ijrs} Z_{r,s} \, . \tag{2}$$

В уравнении (2) массив целых чисел E_{ij} содержит порядки производных, требуемых для выполнения граничных условий. Первый индекс i пробегает все узлы элемента: $i=1,\ldots,N$; $N=\dim[E]$; диапазон изменения индекса $j=0,\ldots,\dim[E_i]-1$ может изменяться в зависимости от индекса узла i, т.е. значение $\dim[E_i]$ равно числу граничных условий в узле i.

Ниже в работе массив E_{ij} представляется таким образом: $E_{ij}=[\{(E_{10}), (E_{11}), \ldots\}, \{(E_{20}), \ldots\}, \ldots]$. Т.е. весь массив заключается в квадратные скобки, его часть, относящаяся к конкретному узлу, помещается в фигурные скобки, и, наконец, скалярные элементы даются в круглых скобках. В большинстве случаев структура массива одинакова для всех узлов и достаточно указать только фигурные скобки для одного узла: $E_{ij}=\{(E_{i0}), (E_{i1}), \ldots\}$.

В уравнении (2) узловые координаты обозначаются двумя эквивалентными способами: с использованием двух индексов, $Z_{r,s}$, где индекс r соответствует номеру узла, а s – индексу координаты в узле (начиная с 0); с использованием одного индекса, Z_k, где $k=1,\ldots,D$ – глобальный номер координаты в элементе. В разных частях работы одно из двух представлений оказывается более удобным, чем другое.

1.2. *Параметр c для обозначения структуры узловых координат*

Общая формула для вычисления значений E_{ij} для разных типов представления параметра c может быть записана так:

$$E_{ij}=\begin{cases} j & {}_{j=0,\ldots,C(c)-1}, \quad \text{если } c\le 9-\text{цифра} \quad (c=3): \qquad E_{ij}=\{(0),(1),(2)\}; \\ I_j & {}_{j=0,\ldots,C(c)-1}, \quad \text{если } c-\text{двоичное} \quad (c=1101): \quad E_{ij}=\{(0),(2),(3)\}. \end{cases} \tag{3}$$

Функция $C(c)$, встречающаяся в формулах (3) и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, возвращает число узловых координат, соответствующих узловому коду c; эта функция определена так:

$$C(c)=\begin{cases} c, & \text{если } c\le 9-\text{цифра}: \quad C(3)=3; \\ \text{число единиц в } c, & \text{если } c-\text{двоичное}: \quad C(1101)=3. \end{cases} \tag{4}$$

Параметр c в виде одной десятичной цифры, $c\le 9$

В самом распространённом случае параметр c равен числу производных от переменной Z, использующихся как узловые степени свободы: Z, $\frac{d}{dx}Z$, $\frac{d^2}{dx^2}Z$, …, $\frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}}Z$. Т.е. предполагается непрерывный ряд производных, начиная с 0-й производной (сама переменная Z) и заканчивая ($c-1$)-й производной.

Двоично-десятичный параметр c

В узлах конечных элементов иногда некоторые из производных могут отсутствовать в списке узловых переменных. В таких случаях может быть использовано двоично-десятичное представление параметра c. Например, на рис. 1 изображён треугольный элемент Морли 9]. Он имеет 3 узла в вершинах, в каждой из которых введена 1 координата – перемещение узла, и 3 узла на серединах сторон, в которых введена координата, являющаяся нормальной производной. Эта координата может быть закодирована двоично-десятичным кодом 10, где 0 означает отсутствие координаты-перемещения, а 1 – производную по нормали. Матрица E_{ij} в этом случае имеет вид $E_{ij}=[\{(0)\},\{(0)\},\{(0)\},\{(1)\},\{(1)\},\{(1)\}]$. В другом примере, приведенном в тексте ниже, использован код 110000, соответствующий вторым производным $\partial^2 Z/\partial x^2$ и $\partial^2 Z/\partial y^2$. Подробнее про двоичное кодирование координат можно почитать в 7].

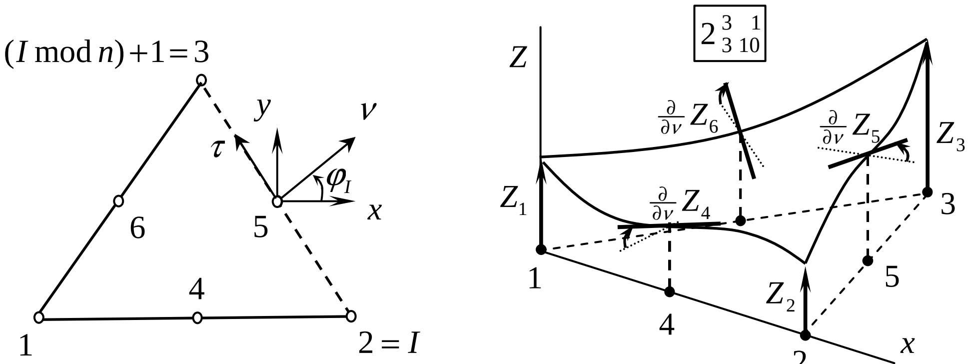

Рис. 1. Элемент Морли

1.3. *Автоматическое формирование функций формы элемента*

Подстановка полинома **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в уравнение (2) приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{array}{l} l=0 \\ \text{для } i=1,\ldots,N \\ \quad \text{для } j=0,\ldots,\dim[E_i]-1 \\ \quad\quad l=l+1 \end{array} \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{D-1}(\alpha_{Dk}^{21})_{-\alpha_{DE_{ij}}^{21}}(\alpha_{Dk}^{22})_{-\alpha_{DE_{ij}}^{22}}\, x_i^{\alpha_{Dk}^{21}-\alpha_{DE_{ij}}^{21}}\, y_i^{\alpha_{Dk}^{22}-\alpha_{DE_{ij}}^{22}}}_{W_{l,k+1}} a_{k+1}=\sum_{k=1}^{D} B_{lk} z_k\,, \tag{5}$$

которая имеет матричную форму $\mathbf{W}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{z}$.

Величины $(k-1)_{-j}$ представляют собой падающий факториал Похгаммера:

$$(\alpha)_{-r}=\underbrace{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-r+1)}_{r\ \text{сомножителей}}=\begin{cases}\frac{\alpha!}{(\alpha-r)!}, & \text{если } \alpha\ge r;\\ 0, & \text{если } \alpha<r.\end{cases}$$

Компоненты матрицы **W** определены в самом уравнении (5). После решения его относительно вектора **a** полином $Z^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)$ принимает вид

$$Z^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)=\underbrace{\mathbf{x}(x,y)\cdot\mathbf{W}^{-1}}_{\mathbf{s}^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{s}^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)\cdot\mathbf{z}\,. \tag{6}$$

Матрица **W** постоянна, вектор-строка **x** зависит от локальных координат x и y, вектор-столбец **z** содержит узловые координаты, вектор-строка $\mathbf{s}^{2^{nc}_{\cdots}}(x,y)$ содержит функции формы.

2. Расширенный десятичный код элемента

В данном разделе впервые вводится расширенный десятичный код с целью охватить им гораздо больший круг элементов, имеющих сложную кинематику. Для обозначения специальных групп элементов, имеющих широкое применение в приложениях, параметрам n, c, m и т.д. предлагается назначать отрицательные значения, которые имеют чётко определённый смысл и влияют определённым образом на формальную процедуру построения элементов, описанную выше.

2.1. *Дополнительные функции формы*

Известно, что билинейный элемент Q4, или 2412 в предложенной нотации, имеет избыточную сдвиговую жёсткость при изгибе 4]. Одна из возможностей исправить этот недостаток – использование дополнительных (внеузловых) функций формы. Два дополнительных узла вводятся для исправленного элемента Q6 как показано на рис. 2, слева (иногда они вводятся внутри элемента).

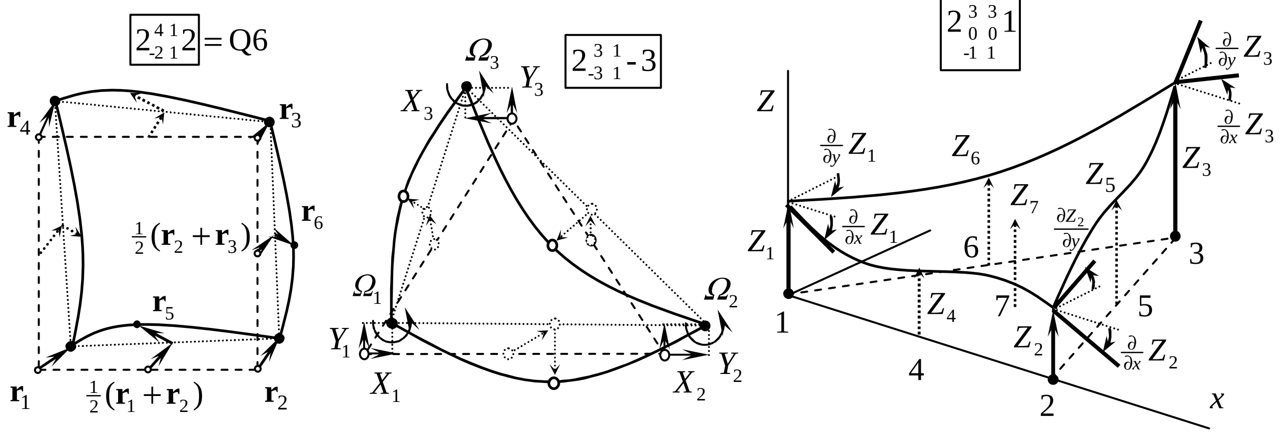

Рис. 2. Элемент Q6 с дополнительными функциями формы; треугольник Оллмана; треугольник Базли

В работе 8] этот элемент был обозначен следующим расширенным кодом:

$$2\,{}^{4}_{2}12(2\,{}^{4}_{2}12)\{\breve{z}_i = z_{i;\, i=1,\dots,4};\ \ \breve{z}_i = z_i + \tfrac12(z_{i-4} + z_{i-4+1})_{;\, i=5,6}\}\,. \tag{7}$$

В данной работе этот элемент обозначается простым кодом $2{}^{4}_{-2}12$ (рис. 2). Знак «минус» в числе узлов –2 отражает тот факт, что дополнительные узлы вводятся временно, т.е. значение –2 имеет смысл ±2. Кроме того, он ссылается на специфическое преобразование координат в формуле (7) и описанное ниже. И вообще, любой элемент, использующий дополнительные функции формы, будет обозначаться $d{}^{n}_{-\eta}1m$.

Узловые координаты z_5 и z_6 временных узлов являются не просто их перемещениями, а трактуются как смещения этих узлов относительно середины отрезков (1, 2) и (2, 3) при смещённых узлах 1, 2 и 3. Уравнения (2) при этом принимают следующий явный вид:

$$Z^{d^{\,n}_{-\eta}1}(x_i, y_i, \dots) = z_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$Z^{d^{\,n}_{-\eta}1}(x_i, y_i, \dots) = z_i + \tfrac12(z_{i-n+e} + z_{(i-n+e \bmod n)+1}), \quad i = n+1, \dots, n+\eta.$$

С использованием матрицы B_{ij} в уравнении (2) это эквивалентно уравнению

$$Z^{d^{\,n}_{-\eta}1}(x_i, y_i, \dots) = \sum_{j=1}^{N} B_{ij}^{d^{\,n}_{-\eta}1} z_j, \qquad i = 1, \dots, N\,, \tag{8}$$

со следующим значением матрицы B_{ij}:

$$B_{ij}^{d^{\,n}_{-\eta}1} = \delta_{ij} + \tfrac12\delta_{i-n,j} + \tfrac12\delta_{(i-n)\bmod n+1,\, j-\delta_{d,3}\delta_{i,n+\eta}n/2}\,,$$

где δ_{ij} – это символ Кронекера.

Функции формы после решения уравнения (8) примут вид

$$s_{i,0}^{d^{\,n}_{-\eta}1} = s_{i,0}^{dn1}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$s_{n+i,0}^{d^{\,n}_{-\eta}1} = 1 - \xi_i^2, \quad i = 1, \dots, \eta, \qquad (\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = \eta,\ \xi_3 = \zeta).$$

Элементы, использующие дополнительные функции формы: упомянутый $2{}^{4}_{-2}12$, объёмный одиннадцатиузловой $3{}^{8}_{-3}13$ на основе шестигранника-кубика и семиузловой $3{}^{6}_{-1}13$ на основе треугольной призмы. Явный вид матриц $\mathbf{B}^{d^{\,n}_{-\eta}1}$ для них следующий:

$$
\mathbf{B}^{2^{\,4}_{-2}1}=\begin{bmatrix}1&o&o&o&o&o\\ o&1&o&o&o&o\\ o&o&1&o&o&o\\ o&o&o&1&o&o\\ 0.5&0.5&o&o&1&o\\ o&0.5&0.5&o&o&1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}^{3^{\,8}_{-3}1}=\begin{bmatrix}1&o&o&o&o&o&o&o&o&o&o\\ o&1&o&o&o&o&o&o&o&o&o\\ o&o&1&o&o&o&o&o&o&o&o\\ o&o&o&1&o&o&o&o&o&o&o\\ o&o&o&o&1&o&o&o&o&o&o\\ o&o&o&o&o&1&o&o&o&o&o\\ o&o&o&o&o&o&1&o&o&o&o\\ o&o&o&o&o&o&o&1&o&o&o\\ 0.5&0.5&o&o&o&o&o&o&1&o&o\\ o&0.5&0.5&o&o&o&o&o&o&1&o\\ o&o&0.5&o&o&o&0.5&o&o&o&1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}^{3^{\,6}_{-1}1}=\begin{bmatrix}1&o&o&o&o&o&o&o\\ o&1&o&o&o&o&o&o\\ o&o&1&o&o&o&o&o\\ o&o&o&1&o&o&o&o\\ o&o&o&o&1&o&o&o\\ o&o&o&o&o&1&o&o\\ o&o&o&o&o&o&1&o\\ 0.5&o&o&0.5&o&o&o&1\end{bmatrix}.
$$

2.2. *Геометрическая конденсация узлов*

В данном параграфе в качестве примера приводится элемент 5-узловой призмы, для построения которой применяется конденсация узлов, и объясняется, как данная техника описывается с помощью расширенного кода *dncm*. Узлы единичной призмы обычно заданы так:

$$\{x_i, y_i, z_i\} = \{\pm 1, \pm 1, -1\}, \quad i = 1, \ldots, 4; \qquad \{x_5, y_5, z_5\} = \{0,\ 0, +1\}.$$

Интуитивно простой код 351 не может использоваться здесь, потому что он диктует полином $Z^{351}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{5-1} a_{k+1} x^{\alpha_{5k}^{31}} y^{\alpha_{5k}^{32}} z^{\alpha_{5k}^{33}} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xyz$, который не содержит квадратичных членов. Вместо этого элемент пирамиды обозначается $3^{-5\,1}_{\ 3\,1}$ или просто $3^{-5}_{3}1$ (мотивация приведена ниже), и полином содержит $D = 5 + 3 = 8$ слагаемых, как для базового элемента единичного параллелепипеда:

$$Z^{3^{-5}_{3}1}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{8-1} a_{k+1} x^{\alpha_{8k}^{31}} y^{\alpha_{8k}^{32}} z^{\alpha_{8k}^{33}} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 xz + a_7 yz + a_8 xyz\,.$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_8$ получаются, как обычно, из системы линейных уравнений $Z^{3^{-5}_{3}}(x_i, y_i, z_i) = Z_i$, $i = 1, \ldots, 5$, вида (2), которая в данном случае неквадратная, размером 5×8:

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&1&1&1&-1\\ 1&1&-1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&1&1&-1&-1&-1&1&-1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&-1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ Z_4\\ Z_5\end{Bmatrix}, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{W}_{[5\times 8]}\cdot\mathbf{a}_8 = \mathbf{z}_5\,. \tag{9}$$

Для нахождения решения такой системы для неизвестных $a_1, \ldots, a_8$ можно применить псевдообратную матрицу Мора–Пенроуза для матрицы $\mathbf{W}_{[5\times 8]}$:

$$\mathbf{a}_8 = \mathbf{W}^{+}_{[8\times 5]}\cdot\mathbf{z}_5 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}_{[8\times 5]}\cdot[\underbrace{\mathbf{W}_{[5\times 8]}\cdot\mathbf{W}^{\mathrm{T}}_{[8\times 5]}}_{=\mathbf{diag}[8,8,8,8,2]}]^{-1}\cdot\mathbf{z}_5\,. \tag{10}$$

Наконец, функции формы 5-узловой пирамиды вычисляются по формуле (6):

$$s_{i,0}^{3^{-5}_{3}} = \tfrac{1}{8}(1\pm\xi)(1\pm\eta)(1-\zeta), \quad i = 1, \ldots, 4 \quad \text{(в данном случае } \xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z\text{)};$$

$$s_{5,0}^{3^{-5}_{3}} = \tfrac{1}{2}(1+\zeta).$$

Таким образом, специальная комбинация $n < 0$ и $\eta > 0$ используется в коде $3^{-5\,1}_{\ 3\,1}$ для представления элементов, которые получаются из вспомогательного элемента с $|n| + |\eta|$ узлами после конденсации его η узлов в соответствии с формулами (9) и (10). Число $|n|$ показывает число узлов после конденсации.

Другие элементы этого типа – четырёхугольная пирамида $3^{-5\,1}_{\substack{-8\,1\\ 7\,1}}$ и трёхгранная призма $3^{-6\,1}_{\substack{-9\,1\\ 5\,1}}$ с дополнительными узлами на серединах сторон. В обоих случаях интерполяционные полиномы базируются на 20-членном полиноме параллелепипеда, так как $5 + 8 + 7 = 20$ и $6 + 9 + 5 = 20$.

2.3. *Треугольник Оллмана с вращательными узловыми координатами*

Треугольник Оллмана с вращательными узловыми координатами 2] является важной составной частью многих элементов пластин. Он имеет три узла с тремя координатами в каждом: перемещения X_n, Y_n и угол поворота Ω_n, $n=1,\ldots,3$ (рис. 2, в центре). Такой набор координат формально соответствует коду 2313. Однако его кинематика определяется вспомогательным 6-узловым элементом с линейными деформациями (2612) с двумя координатами в узлах – $\breve{X}_n$, $\breve{Y}_n$, $n=1,\ldots,6$. В работе 8] он был обозначен так:

$$2313^{(2612)\{\breve{Z}_n^m = Z_n^m,\ \breve{Z}_{n+3}^m = \frac{1}{2}(Z_n^m + Z_{n \bmod 3+1}^m) + (-1)^m (x_n^{3-m} - x_{n \bmod 3+1}^{3-m})\frac{1}{8}(Z_{n \bmod 3+1}^3 - Z_n^3),\ \substack{m=1,2\\ n=1,\ldots,3}\}}. \tag{11}$$

Выражения в фигурных скобках в формуле (11) определяют преобразования между наборами координат упомянутых элементов 2313 и 2612. В них для краткости принято, что $\breve{Z}_n^1 = \breve{X}_n$, $\breve{Z}_n^2 = \breve{Y}_n$ и $Z_n^1 = X_n$, $Z_n^2 = Y_n$, $Z_n^3 = \Omega_n$. Величины $x_n^1 = x_n$ и $x_n^2 = y_n$ обозначают декартовы координаты узлов треугольника. В виде матриц это преобразование выглядит так:

$$\left\{\begin{matrix} \breve{X}_1 \\ \breve{Y}_1 \\ \breve{X}_2 \\ \breve{Y}_2 \\ \breve{X}_3 \\ \breve{Y}_3 \\ \breve{X}_4 \\ \breve{Y}_4 \\ \breve{X}_5 \\ \breve{Y}_5 \\ \breve{X}_6 \\ \breve{Y}_6 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_1-y_2}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_2-y_1}{8} & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_2-x_1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_1-x_2}{8} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_2-y_3}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_3-y_2}{8} \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_3-x_2}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_2-x_3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_1-y_3}{8} & & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{y_3-y_1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_3-x_1}{8} & & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_1-x_3}{8} \end{bmatrix} \cdot \left\{\begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ \Omega_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Omega_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ \Omega_3 \end{matrix}\right\}, \qquad \text{или} \qquad \breve{\mathbf{z}}^{2612} = \mathbf{T}_{12\times 9} \cdot \mathbf{z}^{2313}. \tag{12}$$

Интерполяционные полиномы и матрица функций формы **S** получаются такими:

$$^{2313(2612)}\mathbf{r}(x,y) = \mathbf{S}^{2612}(x,y) \cdot \breve{\mathbf{z}}^{2612} = \underbrace{\mathbf{S}^{2612}(x,y) \cdot \mathbf{T}_{12\times 9}}_{\mathbf{S}^{2313(2612)}(x,y)} \cdot \mathbf{z}^{2313} = \mathbf{S}^{2313(2612)}(x,y) \cdot \mathbf{z}^{2313}. \tag{13}$$

Можно видеть, что расширенная нотация в форме (11), которая представляет уравнения (12) и (13), слишком неудобна и длинна. В данной работе этот элемент обозначается $2\substack{3\;1\\-3\;1}\text{-}3$. В данном обозначении отрицательный знак в значении $m=\text{-}3$ подчёркивает, что этот элемент не является элементом с дополнительными функциями формы $2\substack{3\;1\\-3\;1}$ (параграф 2.1), у которого 3 одинаковых полинома, а вместо этого ссылается на специфические преобразования в формулах (11) – (13). Обозначение $2\substack{3\;1\\-3\;1}\text{-}3$ можно сократить до 231-3.

2.4. *Треугольник Базли*

Изгибный треугольный элемент пластины обычно имеет три узла с тремя координатами в узле: перемещение Z_i в узле i и две производные (повороты) $\frac{\partial}{\partial x} Z_i = Z_{i,1}$ и $\frac{\partial}{\partial y} Z_i = Z_{i,2}$ (рис. 2, справа). Формально элемент с такими узловыми координатами может обозначаться 2331, и он существует. К сожалению, такой простой элемент имеет дефект интерполяционного полинома, который приводит к вырождению матрицы **W**, если треугольник становится прямоугольным 4]. Причина этого в том, что данный полином является неполным, так как насчитывает лишь $3\times 3=9$ членов, в то время как полный кубический полином должен содержать 10. Базли в работе 3] ввёл вспомогательный узел с номером 7 в центре (а не на сторонах) треугольника. Данный элемент может быть обозначен $2\substack{3\;3\\0\;0\\-1\;1}1$ (≡Baz – обозначение, принятое в данном параграфе для краткости). Отрицательное значение –1 может пониматься как ±1, так как этот узел вводится временно для увеличения порядка полинома до 10 членов. Его перемещение Z_7 не входит в число координат, так как его заменяют на средневзвешенное значение перемещений шести узлов, показанных на рисунке.

$$Z^{\mathrm{Baz}}(x_7, y_7) = -\frac{1}{9}(Z_1 + Z_2 + Z_3) + \frac{4}{9}(Z_4 + Z_5 + Z_6), \tag{14}$$

где перемещения Z_4, Z_5, Z_6 в дополнительных узлах на сторонах также вычисляются через средневзвешенные узловые перемещения и наклоны в узлах 1, 2 и 3 ($i = 1,\ldots,3$):

$$Z_{3+i} = \frac{1}{2}(Z_i + Z_{i \bmod 3+1}) - \frac{1}{8}((Z_{i \bmod 3+1,1} - Z_{i,1})(x_{i \bmod 3+1} - x_i) + (Z_{i \bmod 3+1,2} - Z_{i,2})(y_{i \bmod 3+1} - y_i)).$$

За исключением граничного условия (14), которое соответствует строке $_{-1\ 1}$ в коде элемента, применяются обычные условия для кода $^{3\ 3}$ в соответствии с уравнением (2):

$$Z^{\mathrm{Baz}}(x_i, y_i) = Z_i, \quad \tfrac{\partial}{\partial x} Z^{\mathrm{Baz}}(x_i, y_i) = Z_{i,1}, \quad \tfrac{\partial}{\partial y} Z^{\mathrm{Baz}}(x_i, y_i) = Z_{i,2}, \quad i = 1,2,3. \tag{15}$$

Таким образом, в этом случае матрица перемешивания узловых координат **B** в уравнении (2) имеет размер 10×9 и является почти единичной (кроме последней, 10-й строки):

$$B^{\mathrm{Baz}}_{10,3i-2} = \frac{1}{3},\ B^{\mathrm{Baz}}_{10,3i-1} = \frac{1}{18}(x_j - 2x_i + x_k),\ B^{\mathrm{Baz}}_{10,3i} = \frac{1}{18}(y_j - 2y_i + y_k),\ (i,j,k) = \Theta(1,2,3).$$

Функции формы в явном выглядят следующим образом:

$$s^{\mathrm{Baz}}_{i,0}(x,y) = L_i^2(L_i + 3L_j + 3L_k) + 2L_1L_2L_3, \qquad \{i,j,k\} = \Theta(1,2,3),$$

$$s^{\mathrm{Baz}}_{i,1}(x,y) = L_i^2((x_j - x_i)L_j - (x_i - x_k)L_k) - \tfrac{1}{2}(2x_i - x_k - x_j)L_1L_2L_3,$$

$$s^{\mathrm{Baz}}_{i,2}(x,y) = L_i^2((y_j - y_i)L_j - (y_i - y_k)L_k) - \tfrac{1}{2}(2y_i - y_k - y_j)L_1L_2L_3.$$

2.5. *Треугольные пластины с дискретными условиями Кирхгофа*

В строительной механике известен треугольный элемент пластины с дискретными условиями Кирхгофа (DKT в англоязычной литературе) 4]. В каждом узле i он имеет три узловые координаты, как и в предыдущем случае, Z_i, $\tfrac{\partial}{\partial x} Z_i = Z'_{xi}$ и $\tfrac{\partial}{\partial y} Z_i = Z'_{yi}$, что формально соответствует коду 2331. Однако из-за наличия дефекта, описанного выше, элемент DKT основан на вспомогательном элементе (2612), который имеет два полных полинома второго порядка с 6 членами. Вспомогательными координатами в каждом узле являются $\tfrac{\partial}{\partial x} \breve{Z}_i = \breve{Z}'_{xi}$ и $\tfrac{\partial}{\partial y} \breve{Z}_i = \breve{Z}'_{yi}$. В работе 8] этот элемент имел обозначение

$$2331^{(2612)\{\breve{Z}'_{xi} = Z'_{xi};\ \breve{Z}'_{yi} = Z'_{yi};\ \breve{Z}^{;\mathrm{n}}_{i+3} = \frac{1}{2}(Z^{;\mathrm{n}}_i + Z^{;\mathrm{n}}_{i \bmod 3+1});\ \breve{Z}^{;\mathrm{t}}_{i+3} = \frac{3}{2L_i}(Z_{i \bmod 3+1} - Z_i) - \frac{1}{4}(Z^{;\mathrm{t}}_i + Z^{;\mathrm{t}}_{i \bmod 3+1});\ i=1,2,3\}}. \tag{16}$$

Преобразование между наборами координат $\check{Z}$ и Z в формуле (16) означает, что нормальные $^{,\mathrm{n}}$ и тангенциальные $^{,\mathrm{t}}$ производные от перемещений $\check{Z}$, вычисленные во вспомогательном элементе 2612, равны соответствующим производным от перемещений Z в искомом элементе в вершинах и серединах сторон треугольника, т.е. в дискретном наборе точек (отсюда и название). Поскольку упомянутые производные в серединах сторон отсутствуют в наборе Z, они интерполируются через узловые значения, как указано в формуле. Матричный вид данного преобразования таков:

$$
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&c_1&s_1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-s_1&c_1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&c_2&s_2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-s_2&c_2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&c_3&s_3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-s_3&c_3
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix}
\breve{Z}'_{x1}\\ \breve{Z}'_{y1}\\ \breve{Z}'_{x2}\\ \breve{Z}'_{y2}\\ \breve{Z}'_{x3}\\ \breve{Z}'_{y3}\\ \breve{Z}'_{x4}\\ \breve{Z}'_{y4}\\ \breve{Z}'_{x5}\\ \breve{Z}'_{y5}\\ \breve{Z}'_{x6}\\ \breve{Z}'_{y6}
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&\frac{c_1}{2}&\frac{s_1}{2}&0&\frac{c_1}{2}&\frac{s_1}{2}&0&0&0\\
\frac{-3}{2L_1}&\frac{s_1}{4}&\frac{-c_1}{4}&\frac{3}{2L_1}&\frac{s_1}{4}&\frac{-c_1}{4}&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{c_2}{2}&\frac{s_2}{2}&0&\frac{c_2}{2}&\frac{s_2}{2}\\
0&0&0&\frac{-3}{2L_2}&\frac{s_2}{4}&\frac{-c_2}{4}&\frac{3}{2L_2}&\frac{s_2}{4}&\frac{-c_2}{4}\\
0&\frac{c_3}{2}&\frac{s_3}{2}&0&0&0&0&\frac{c_3}{2}&\frac{s_3}{2}\\
\frac{3}{2L_3}&\frac{s_3}{4}&\frac{-c_3}{4}&0&0&0&\frac{-3}{2L_3}&\frac{s_3}{4}&\frac{-c_3}{4}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix}
Z_1\\ Z'_{x1}\\ Z'_{y1}\\ Z_2\\ Z'_{x2}\\ Z'_{y2}\\ Z_3\\ Z'_{x3}\\ Z'_{y3}
\end{Bmatrix},
$$

$$\mathbf{L}\cdot\breve{\mathbf{z}}^{2612}=\mathbf{T}^{*}_{12\times 9}\cdot\mathbf{z}^{2331}.$$

Интерполяционные полиномы и матрица функций формы полученного элемента:

$$^{2331(2612)}\mathbf{r}(x,y)=\mathbf{S}^{2612}(x,y)\cdot\breve{\mathbf{z}}^{2612}=\underbrace{\mathbf{S}^{2612}(x,y)\cdot\mathbf{L}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{*}_{12\times 9}}_{\mathbf{S}^{2331(2612)}(x,y)}\cdot\mathbf{z}^{2331}=\mathbf{S}^{2331(2612)}(x,y)\cdot\mathbf{z}^{2331}.$$

Систематическое обозначение этого элемента следующее: $2^{3\ \ \ 1}_{-3\ 110}\text{-}3$. Значение –3 вновь означает ±3, т.е. временное введение узлов на серединах сторон, а параметр $\varsigma=110$ – это двоичный код производных в этих узлах. $2^{3\ \ \ 1}_{-3\ 110}\text{-}3$ можно сократить до 233-1.

2.6. *Интегральные узловые координаты при c < 0*

Элемент Вильсона. Существует класс элементов, в которых узловые координаты могут зависеть от интегралов по площади (или граням) элемента. Простой пример – это элемент Вильсона (рис. 3, слева).

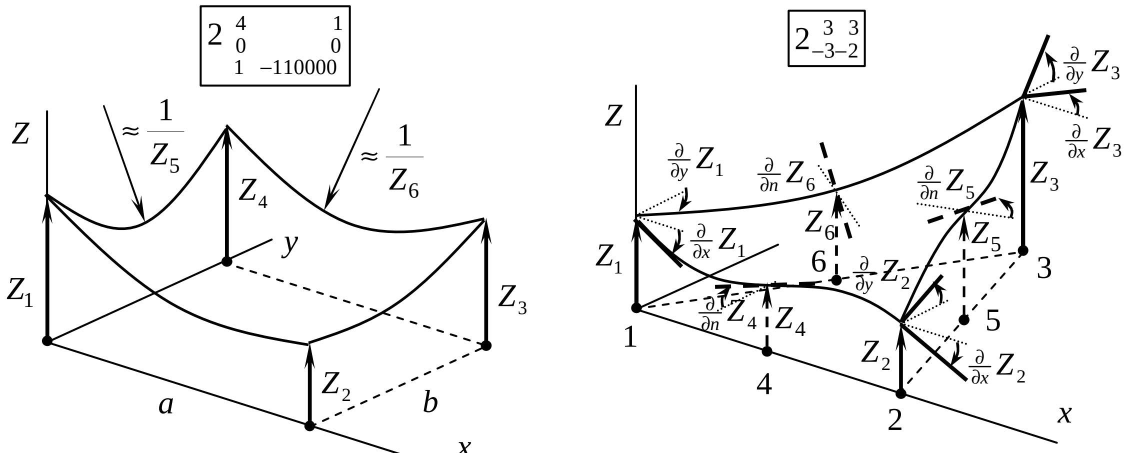

Рис. 3. Элемент Вильсона; элемент Шпехта

Поле перемещений элемента $Z(x,y)$, согласно формулам **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и (4), содержит 6 полиномиальных членов и 6 узловых координат. Четыре из них – это узловые перемещения $Z_1,\dots,Z_4$, а оставшиеся две – усреднённые по площади элемента значения вторых производных от перемещения по локальным направлениям x и y:

$$Z(x_1,y_1)=Z_1,\quad Z(x_2,y_2)=Z_2,\quad Z(x_3,y_3)=Z_3,\quad Z(x_4,y_4)=Z_4,$$

$$\frac{1}{ab}\int_0^a\left(\int_0^b\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=Z_5,\quad \frac{1}{ab}\int_0^a\left(\int_0^b\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=Z_6. \tag{17}$$

Указанные в (17) вторые производные соответствуют двоичному коду 110000, но поскольку эти величины стоят под знаком интеграла, им соответствует отрицательное значение – 110000. Мнемоника данного обозначения ясна: отрицательная производная означает интегрирование. Наконец, поскольку интегрирование ведётся по площади, а не по сторонам элемента, этот код помещён в третью строку кода (в соответствии с п. 1). В итоге код элемента выглядит так: $2\begin{smallmatrix}4 & & 1\\ 0 & & 0\\ 1 & -110000 & \end{smallmatrix} \equiv \mathrm{Wil}$.

Функции формы имеют вид

$$s_{i,0}^{\mathrm{Wil}} = \frac{1}{4}(1\pm\xi)(1\pm\eta),\ \ i=1,\ldots,4; \qquad s_{5,0}^{\mathrm{Wil}} = \frac{1}{2}(\xi^2-1), \qquad s_{6,0}^{\mathrm{Wil}} = \frac{1}{2}(\eta^2-1).$$

Треугольный элемент Шпехта 10] (рис. 3, справа) в работе 8] обозначен так:

$$233^{(2^{3\,3}_{3\,2})\{\breve{Z}_n=Z_n;\ \breve{Z}'_{xn}=Z'_{xn};\ \breve{Z}'_{yn}=Z'_{yn};\ \int_{L_n}\breve{Z}\mathrm{d}\tau=\frac{L_n}{2}(Z_n+Z_{n+1})+\frac{L_n}{12}(Z_n^{,\mathrm{t}}-Z_{n+1}^{,\mathrm{t}});\ \int_{L_n}\breve{Z}^{,\mathrm{n}}\mathrm{d}\tau=\frac{L_n}{2}(Z_{n+1}^{,\mathrm{n}}-Z_n^{,\mathrm{n}});\ n=1,\ldots,3\}}. \qquad (18)$$

Элемент имеет $3\cdot 3=9$ узловых координат, как типичный элемент пластины. Однако его интерполяционный полином $Z(x,y)$ соответствует вспомогательному элементу $(2^{3\,3}_{3\,2})$ и поэтому содержит $3\cdot 3+3\cdot 2=15$ членов с неопределёнными коэффициентами, согласно формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, т.е. является полным полиномом четвёртой степени по x и y. Девять граничных условий для нахождения коэффициентов соответствуют девяти узловым степеням свободы, как в уравнении (15). Дополнительные 6 условий накладываются в соответствии с так называемым «тестом заплатки» 10]: интегралы от перемещения $\breve{Z}$ и его нормальной производной $\breve{Z}^{,\mathrm{n}}$ вдоль каждой стороны L_i должны определяться координатами в узлах этой стороны.

Краткая, но исчерпывающая нотация для этого элемента: $2^{3\ \ 3}_{-3\ -2}$. Минус в показателе производных от координат -2 показывает два интегрирования в формуле (18) как обратные операции для дифференцирования. Знак «минус» в числе узлов -3 означает, что соответствующие интегральные степени свободы не вводятся в качестве новых координат, как в элементе Вильсона, а, напротив, исключаются путём интерполирования, как указано выше.

Элемент Вёбеке – это непрямоугольный конформный элемент пластины, предложенный в работе 5], один из самых удачных в своём роде; обозначается $2^{\ 4\ \ 3}_{-4\ 10}\text{-}3$.

3. Неполиномиальные функции формы

Выше в тексте функции формы для элемента с D степенями свободы содержали только полиномиальные члены. Например, для одномерного случая: $w_0=1$, $w_1=x$, $w_2=x^2,\ldots,w_{D-1}=x^{D-1}$. Все они являются решениями дифференциального уравнения $w^{(D)}=0$. Коэффициенты этого уравнения можно свести в вектор $\{1,0,0,\ldots,0\}$, используемый по умолчанию. Вообще, встречаются обобщения этого уравнения с произвольным набором коэффициентов:

$$\frac{\mathrm{d}^D w}{\mathrm{d}x^D}+c_{D-1}\frac{\mathrm{d}^{D-1}w}{\mathrm{d}x^{D-1}}+\ldots+c_2\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}+c_1\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+c_0 w=0.$$

Тогда элемент может быть обозначен так: $dncm\{1,c_{D-1},\ldots,c_2,c_1,c_0\}$. Примеры:

122 $\qquad w_k=\{1,x,x^2,x^3\}$ – обычный балочный элемент;

$122\{1,0,0,0,-b^4\}$ $\qquad w_k=\{\cos bx,\sin bx,e^{bx},e^{-bx}\}$; $w_k=\{\cos bx,\sin bx,\cosh bx,\sinh bx\}$ – гиперболические функции формы;

$w_k=\{\cosh bx+\cos bx,\sinh bx+\sin bx,\cosh bx-\cos bx,\sinh bx-\sin bx\}$ – функции Крылова;

$122\{1,0,-b^2,0,0\}$ $w_k=\{1,x,e^{bx},e^{-bx}\}$; $w_k=\{1,x,\cosh bx,\sinh bx\}$;

$122\{1,0,a,0,b\}$ $w_k=\{\cosh kx\cos lx,\cosh kx\sin lx,\sinh kx\cos lx,\sinh kx\sin lx\}$ – это модифицированные функции Крылова, встречающиеся, например, в работе 1].

Заключение

В данной статье продолжена разработка десятичного номенклатурного кода *dncm*, созданного для систематического однозначного и конструктивного обозначения произвольного конечного элемента, учитывающего его геометрию, структуру узлов, узловых координат и других параметров. Значительно расширен круг конечных элементов, который может быть описан с помощью предложенного подхода. Приведены примеры конкретных элементов, используемых на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитроченко, О.Н. Десятичный номенклатурный код *dncmkot* для идентификации существующих и автоматической генерации новых конечных элементов / О.Н. Дмитроченко // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 1. - С. 207-217.
1. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. - М.: Физматлит, 1960. - 491 с.
2. Allman, D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis / D.J. Allman // Computers and Structures. - 1984. - № 19 (1). - P. 1-8.
3. Bazeley, G.P. Triangular Elements in Bending - Conforming and Nonconforming Solutions / G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. - Air Force Inst. Of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
4. Cook, R.D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis / R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, R.T. Witt. - Fourth edition. - John Wiley & Sons, Inc. - 2002.
5. Veubeke, B.F. Variational principles and the path test / B.F. Veubeke // Int. J. Num. Meth. Eng. - 1974. - № 8(4). - P. 783-801.
6. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Multibody System Dynamics. - 2009. - № 22 (4). - P. 323-339.
7. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Proc. of the Inst. of Mech. Eng. Part K: J. of Multi-Body Dyn. - 2011. - № 225(1). - P. 34-51.
8. Dmitrochenko, O. Extended digital nomenclature code for description of complex finite elements and generation of new elements / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Mechanics Based Design of Structures and Machines. - 2011. - № 39 (2). - P. 229-252.
9. Morley, L.S.D. The constant-moment plate-bending element / L.S.D. Morley // J. of Strain Analysis for Engineering Purposes. - 1971. - № 6 (1). - P. 20-24.
10. Specht, B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test / B. Specht // Int. J. of Numerical Methods in Engineering. - 1988. - № 26 (3). - P. 705-715.

1. Dmitrochenko, O.N. Decimal nomenclature code *dncmkot* for identification of existing finite elements and automatic generation of new finite elements / O.N. Dmitrochenko // *Bulletin of Bryansk State Technical University* - 2017. - № 1. - pp. 207-217.
11. Vlasov, V.Z. *Elastic Based Beams, Plates and Casings* / V.Z. Vlasov, N.N. Leontiev - M.: Physmathlit, 1960. – pp. 491 c.
12. Allman, D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis / D.J. Allman // Computers and Structures. - 1984. - № 19 (1). - P. 1-8.
13. Bazeley, G.P. Triangular Elements in Bending - Conforming and Nonconforming Solutions / G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. - Air Force Inst. Of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
14. Cook, R.D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis / R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, R.T. Witt. - Fourth edition. - John Wiley & Sons, Inc. - 2002.
15. Veubeke, B.F. Variational principles and the path test / B.F. Veubeke // Int. J. Num. Meth. Eng. - 1974. - № 8(4). - P. 783-801.
16. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Multibody System Dynamics. - 2009. - № 22 (4). - P. 323-339.
17. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Proc. of the Inst. of Mech. Eng. Part K: J. of Multi-Body Dyn. - 2011. - № 225(1). - P. 34-51.

18. Dmitrochenko, O. Extended digital nomenclature code for description of complex finite elements and generation of new elements / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Mechanics Based Design of Structures and Machines. - 2011. - № 39 (2). - P. 229-252.
19. Morley, L.S.D. The constant-moment plate-bending element / L.S.D. Morley // J. of Strain Analysis for Engineering Purposes. - 1971. - № 6 (1). - P. 20-24.
20. Specht, B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test / B. Specht // Int. J. of Numerical Methods in Engineering. - 1988. - № 26 (3). - P. 705-715.

Статья поступила в редколлегию 27.01.17.
Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного технического университета Сакало В.И.

Сведения об авторах:

Дмитроченко Олег Николаевич, докторант Брянского государственного технического университета, e-mail**:** dmitroleg@rambler.ru.

Dmitrochenko Oleg Nikolayevich, Doctoral student of Bryansk State Technical University, e-mail**:** dmitroleg@rambler.ru.