

К.А. Индюхов, К.А. Батенков, М.В. Стремоухов
(г. Орел, Академия ФСО России)
K.A. Indyukhov, K.A. Batenkov, M.V. Stremoukhov
(Oryol, Academy of Federal Security Service of Russia)

ДИСПЕРСИЯ ОШИБКИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ

DISPERSION OF ERROR OF NONPARAMETRIC METHODS OF EVALUATION
OF NON-STATIONARY SIGNALS

Приведены математические выражения, позволяющие определить дисперсию ошибки оценивания непараметрических методов.

Mathematical expressions are given to determine the variance of the estimation error of nonparametric methods.

Ключевые слова: статистический анализ, дисперсия ошибки оценивания, непараметрические методы оценки.

Keywords: statistical analysis, variance of estimation error, nonparametric estimation methods.

Современные тенденции развития все чаще обращаются к статистическому анализу реальных процессов с целью их дальнейшего моделирования. Часто для описания нестационарных сигналов используют функцию плотности распределения. Стоит так же отметить, что любая оценка будет являться состоятельной только в том случае, когда анализируемая выборка стационарна. Если исследователю доподлинно известен вид закона распределения, которому подчинена рассматриваемая случайная величина, тогда задача её анализа сводится к определению параметров этого закона. Однако, если же таких сведений нет, использование параметрических методов оценки может дать достаточно плохой результат.

В свою очередь непараметрические методы свободны от выбора функциональных форм описания функции плотности распределения случайного процесса. В ситуации, когда сделана ошибка в предположении о форме распределения, использование параметрических методов оценки дает однозначно несостоятельную оценку. Неправильно специфицированная параметрическая модель никогда не сойдется к истинной модели. Таким образом, на начальном этапе анализа нестационарных сигналов, стоит воспользоваться непараметрическими методами. Одним из них является ядерная оценка, выражение для плотности распределения при таком подходе будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h}\right),$$

где n – число реализаций случайной величины x попавших в анализируемый участок локальной стационарности;
 h – ширина окна непараметрической оценки;
 x_i – i -ое значение случайной величины x ;
 $K(x)$ – ядерная функция.

Для оценки свойств ядерных методов используется дисперсия ошибки оценивания:

$$D[\hat{f}(x)] = E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 = [E\hat{f}(x) - f(x)]^2 + \text{var}\hat{f}(x) \quad (1)$$

где $[E\hat{f}(x) - f(x)]$ – асимптотическое смещение непараметрической оценки случайно величины x ;

$\text{var}\hat{f}(x)$ – асимптотическая дисперсия непараметрической оценки случайно величины x ;

$E[\Psi(x)]$ – математическое ожидание функции $\Psi(x)$.

Выражение (1) является точечным свойством и не может являться глобальной мерой ошибки. Для обобщения результатов по всей области определения функции плотности используется общая дисперсия ошибки оценивания:

$$d[\hat{f}(x)] = E \int_{\Omega_x} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx = \int_{\Omega_x} [E\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx + \int_{\Omega_x} \text{var}\hat{f}(x) dx$$

где Ω_x – область определения функции $f(x)$.

Используя выражения для оптимальной ширины окна h , асимптотического смещения непараметрической оценки и асимптотической дисперсии непараметрической оценки из [1] получаем общий вид формулы для определения общей дисперсии ошибки оценивания:

$$d(f, j) = \frac{5}{4} C(K) \left\{ \int_{\Omega_x} f''^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{5}} j^{-\frac{4}{5}} \quad (2)$$

$$C(K) = k_2^{\frac{2}{5}} \left\{ \int_{\Omega_x} K(x)^2 dx \right\}^{\frac{4}{5}}$$

$$k_2 = \int_{\Omega_x} x^2 K(x) dx$$

где j – объем анализируемой выборки;

$C(K)$, k_2 – константы, зависящие от выбранной ядерной функции.

Определившись с используемой ядерной функцией и фиксируя объем анализируемой выборки, отметим, что выражение (2) будет зависеть от функции плотности распределения случайной величины x .

Список литературы

1. Silverman B. W. Density estimation for statistics and data analysis. – Springer-Science+Business Media, B.V., 1986. – 175 с.

Материал поступил в редколлегию 12.10.19.