

УДК 532.517.4:536.24

DOI: 10.30987/article\_5d9317b27868a4.78923465

И.Е. Лобанов

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ДОКРИТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗООБРАЗНОГО ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ В РАЗВЕТВЛЕНИЯХ ТРУБОПРОВОДОВ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Получены аналитические решения задачи о детерминировании параметров течения в разветвлениях потоков газообразного теплоносителя в трубопроводах теплообменных аппаратов, применяемых в различных областях техники, путем ре-

шения системы уравнений количества движения, неразрывности и энергии.

**Ключевые слова:** аналитическое решение, стационарное докритическое течение, теплоноситель, газ, трубопровод, разветвление, теплообменный аппарат.

I.E. Lobanov

## THEORETICAL ANALYTICAL SOLUTION OF PROBLEM ON STATIONARY SUBCRITICAL CURRENT OF GASEOUS HEAT CARRIER IN PIPING BIFURCATIONS OF HEAT-EXCHANGE EQUIPMENT

The aim of the paper consists in obtaining analytical solutions of the problem on current parameters in the flow bifurcations of a gaseous heat carrier in tubes of heat-exchange equipment used in air-space, shipbuilding and other engineering. The investigation method consists in the solution of the equation system of momentum, continuity and power.

In the paper there is substantiated a choice of a theoretical model for a current simulation of a gaseous heat carrier in piping bifurcations of heat-exchange equipment with the allowable degree of proximity to an actual current and complexity of essential computations – a thermo-dynamic model of a subcritical, sta-

tionary current of compressible gas. There are obtained analytical solutions of the problem on the current of gaseous heat carrier flows in piping bifurcations of heat-exchange equipment used in different fields of engineering, in particular, in aero-space and shipbuilding and so on, whereas earlier took place only numerical solutions of this problem. In this paper the solutions were obtained without application of special functions used at the solution of non-linear and transcendental equations.

**Key words:** analytical solution, stationary subcritical current, heat carrier, gas, piping, bifurcation, heat-exchange device.

### Введение

Выбор конкретных физических, а в последующем и математических моделей обуславливается целями не только собственно математического моделирования, но и физического моделирования и синтеза различных методик обработки данных опыта.

Принятие решений о моделях течений газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов и соответствующего выполнения равенства критериев подобия для физического моделирования обуславливается степенью сложности конструкций установок, а выбор моделей для расчётных методик – нужной степенью приближения к реальным течениям и сложностью вынужденных вычислений.

В определённом числе моделей применяется термодинамическое моделирова-

ние газовых теплоносителей – моделирование, в котором преобразование параметров в рассматриваемом пространстве и времени не предусматривается.

В контексте данной статьи течения газовых теплоносителей при разветвлении трубопровода теплообменного аппарата рассматриваются как докритические и стационарные.

Фактическое стационарное течение газовых теплоносителей в трубопроводе теплообменника не одномерное и происходит одновременно с диссипацией механической энергии. Следовательно, при расчёте применяется коэффициент расхода  $\mu$ , который меньше единицы и при помощи которого возможно учесть сужение потока и потери механической энергии.

В соответствии с отношениями давлений и площадей проходных сечений ко-

эффицент расхода  $\mu$  может быть определен на основании опытной статической продувки.

Коэффициент расхода  $\mu$  рассчитывается как отношение действительного расхода на входе в трубопровод  $G_1$  к идеальному  $G'_1$ , то есть без потерь при течении [1; 7; 11]. В научных трудах [1; 3; 6; 7; 11] выявлено, что уменьшенные значения  $G_1$  по сравнению с  $G'_1$  связаны с тем, что плотности  $\rho'_1$  и скорости  $W'_1$  на входах в трубопроводы выше аналогичных фактических значений  $\rho_1$  и  $W_1$ .

Возможно использование двумерных нестационарных моделей идеальных газов при расчётном изучении структур потоков газов в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата.

Численные величины характеристик газовых теплоносителей, которые получены при использовании данного моделирования, только приближённым образом соответствуют характеристикам реальных

потоков газовых теплоносителей, так как вследствие допущения постоянства характеристик относительно третьей координаты нет возможности расчёта действительных размеров отрывных зон и распределений характеристик реальных трёхмерных потоков [1; 3; 7; 11].

Вышеупомянутые математические подходы могут позволить оценить качественную закономерность изменений структур течений и распределений характеристик газовых теплоносителей в трубопроводе теплообменного аппарата как их зависимость от конструкций и форматов разветвлений.

Определение характеристик газовых теплоносителей для граничных профилей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата важно также и для задания граничных условий для расчёта течений теплоносителей для прямых участков трубопровода.

### Физическое моделирование параметров течений газообразных теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата

При течении газового теплоносителя в трубопроводе теплообменного аппарата для учёта потерь возможно использование коэффициента потерь  $\zeta$ , выражающего потери энергии  $l_{\Pi}$  как некоторую долю кинетической энергии стационарного потока газового теплоносителя (для выражения для энергии для одномерных стационарных течений газовых теплоносителей  $l$  рассчитывается как работа  $L$ , которая отнесена к временной единице и массовой единице газа, а именно:  $l=L/(G \cdot dt)$ , т.е. как

энергия, которая эквивалентна мощностной единице газовой массы) [1; 6; 7; 11]:

$$l_{\Pi} = \zeta \rho \frac{W^2}{2}. \quad (1)$$

Коэффициенты потерь  $\zeta$  при течениях газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов могут быть определены как, например, при течениях теплоносителей, которые рассматриваются в виде несжимаемого газа, в коленах (рис. 1).

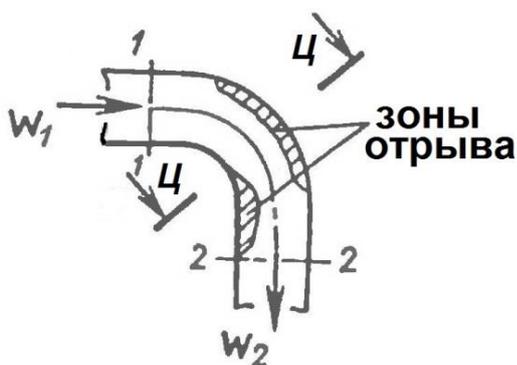


Рис. 1. Схема течений газовых теплоносителей в коленах трубопроводов теплообменных аппаратов

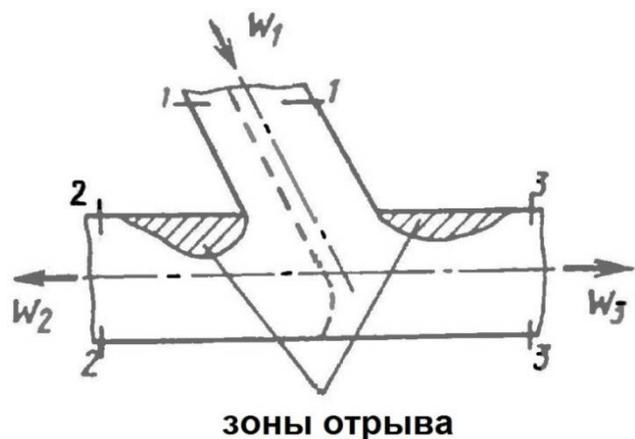


Рис. 2. Схема разделяющихся течений газовых теплоносителей в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов

В профилях 1-1 и 2-2 предполагаем, что профиль скорости несущественно отличается от равномерных идеальных профилей. Записываем уравнение Бернулли для данного течения газовых теплоносителей ( $p_0$  - полное давление, или давление заторможенного потока) [1; 6; 7; 11]:

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} + \zeta \rho \frac{w_2^2}{2}. \quad (2)$$

В левой и правой частях первые слагаемые - давления заторможенных потоков, поэтому коэффициенты потерь  $\zeta$  для несжимаемых газовых теплоносителей будут отражением относительной доли потери полных давлений:

$$\zeta = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho \frac{w_2^2}{2}}. \quad (3)$$

Таким образом, возможно детерминировать - к примеру, по данным опыта - потери полных давлений и  $\rho \frac{w_2^2}{2}$ .

Полные давления можно рассчитать опытным образом, например при помощи приёмников полных давлений. Скорости  $W_2$  вычисляются при известном расходе газовых теплоносителей по выражению  $G = \rho W_2 A_2$  ( $A$  - площади профилей трубопроводов теплообменных аппаратов).

Для несжимаемых газовых теплоносителей теплообменных аппаратов изменения скоростей потоков в профиле 2-2 определяются преобразованием площадей профилей  $A_1$  и  $A_2$ , так как при неизменности плотностей газов из уравнения неразрывности -  $\rho_1 W_1 A_1 = \rho_2 W_2 A_2$  - вытекает соотношение  $W_2 = W_1 (A_1/A_2)$ .

Таким образом, коэффициенты потерь выражают в том числе относительные доли потерь статических давлений.

Коэффициенты сопротивлений  $\zeta$  возможно рассчитать при сопоставлении уравнения Бернулли для течений газовых теплоносителей при отсутствии потерь с соответствующим уравнением Бернулли для течений при потерях ( $(p_2)_{ид}$  - статические давления в профиле 2-2 при течении без потерь) [1; 6; 7; 11]:

$$\zeta = \frac{(p_2)_{ид} - p_2}{\rho \frac{w_2^2}{2}}. \quad (4)$$

Течения газов в коленах трубопроводов теплообменных аппаратов являются неоднородными течениями со сложными пространственными структурами, которые зависят от параметров втекающих газовых теплоносителей, а также геометрии каналов. Инерционная сила стремится к сохранению первоначального прямолинейного движения, следовательно, давления на внешних стенках каналов увеличиваются, а на внутренних - снижаются. Скорости движения частиц газов, которые находятся в пограничных слоях, в сторону главного течения довольно невелики, следовательно, генерирующиеся в поперечных профилях градиенты давлений приводят к перемещению этих частиц по периметрам каналов от внешних стенок к внутренним и образованию в ядрах обратных компенсирующих движений, вследствие чего в поперечных профилях образуются вторичные движения в форме парных вихрей.

Скорости основных потоков газовых теплоносителей в коленах трубопроводов теплообменных аппаратов будут меняться обратно изменениям давлений: скорости газовых теплоносителей в сравнении со скоростями в профиле 1-1 уменьшаются вне пограничных слоёв внешних стенок и повышаются вне пограничных слоёв внутренних стенок. Если кривизна колен трубопроводов теплообменников мала, то давления в пограничных слоях могут являться практически эквивалентными давлениям заторможенных потоков, а вдоль вышеуказанных стенок могут быть образованы вихревые зоны. После преодоления центральных профилей Ц-Ц происходит переформатирование профилей скоростей и давлений следующим образом: в направлениях от внутренних стенок к внешним давления уменьшаются, а скорости повышаются. Направления кривизны внутренних стенок колен трубопроводов теплообменников применительно к направлениям главных движений потоков и вышеуказанное повышение давлений обуславливают образование зон отрыва пограничных слоёв, толщина и протяжённость которых в

значительной мере перекрывают аналогичные величины зон отрыва у внешних стенок [1; 2; 4-8; 11].

Итоговые энергетические потери потоков газовых теплоносителей в коленах трубопроводов теплообменных аппаратов можно подразделить на потери на трение, выходные и внутренние потери, которые связаны с неравномерностями полей скорости и дальнейшим их самовыравниванием. Внутренние потери определяются как потери на трение для вторичных течений и потери на образование вихревой отрывной зоны. Выходные и внутренние потери формируют наибольшую составную часть итоговых энергетических потерь.

Уровень неравномерностей полей скорости, величины отрывной зоны, интенсивности вторичного течения обусловлены геометрическими параметрами колен трубопроводов теплообменных аппаратов и критерием Рейнольдса  $Re$ . Трансформация коэффициентов сопротивлений  $\zeta$  в трубопроводах теплообменных аппаратов может быть вычислена как зависимость от вышеупомянутых характеристик (к примеру, по данным опыта) [2; 4; 5; 8; 9; 11].

Возрастание потерь имеет место и при неравномерностях полей скорости втекающих потоков газовых теплоносителей, так как повышаются градиенты давлений и размеров зон отрыва. Критерии Маха  $M$  при течении газовых теплоносителей в трубопроводе теплообменного аппарата невелики, следовательно, их влияние на коэффициенты сопротивлений незначительно. Выравнивание полей скорости имеет место на значительных длинах трубопровода, которые соединены с коленами. Практически трубопровод теплообменного аппарата может быть и укороченным, следовательно, для вычисления коэффициентов сопротивлений  $\zeta$  обязательно выполнение условия параметрического осреднения в профилях 1-1 и 2-2.

Осреднение характеристик газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменников способствует переходу от рассмотрения потоков с пространственной неравномерностью распределения характеристик к рассмотрению потоков с равномерностью распределения характери-

стик по профилям трубопроводов теплообменников (переход от рассмотрения немалого количества величин характеристик действительных потоков, а именно векторного или скалярного поля характеристик, к определённому меньшему количеству характеристик осреднённых потоков).

При упрощении методов расчёта при осреднении используются некоторые упрощения, принимающиеся при учёте специфики действительного течения газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов. В том случае, если течения газовых теплоносителей характеризуются не очень значительным теплообменом с внешней средой, возможно принятие постоянной во всех точках профилей трубопроводов теплообменников температуры заторможенных потоков  $T_0$ . При определении коэффициента потерь в коленах и разветвлениях трубопровода теплообменника в подавляющем большинстве случаев она может быть признана постоянной по входному и выходному профилям.

Коэффициенты потерь  $\zeta$  могут быть отнесены к характеристикам течения как на выходах трубопроводов теплообменных аппаратов, так и на входах. Диссипацию энергии можно определить, к примеру, следующим образом ( $W_2$  - скорости потоков газовых теплоносителей без потерь на выходах из трубопроводов) [1; 6; 7; 11]:

$$l_n = \zeta \rho \frac{(W_2')^2}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, используя данные опытов для коэффициентов сопротивлений  $\zeta$  для разветвлений трубопровода теплообменного аппарата, главное внимание необходимо обратить на характер детерминирующей коэффициент сопротивления формулы.

Более того, при расчёте характеристик течений несжимаемых газовых теплоносителей при учёте гидромеханического характера потерь в трубопроводе теплообменника неправомерным будет использование равенства температуры заторможенных потоков, так как соотношения между  $T_{01}$  и  $T_{02}$  определяются уравнениями

состояния газов.

При расчёте коэффициентов потерь  $\zeta$  для разветвлений трубопровода теплообменного аппарата для теплоносителей в форме сжимаемых газов возможно использование структуры выражения (3). Формула

$$\zeta = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho_{02} \frac{W_2^2}{2}} \quad (6)$$

постулирует связь между коэффициентом сопротивления  $\zeta$  и коэффициентом восстановления полных давлений  $\sigma$  ( $\sigma = p_{02}/p_{01}$ ) для течения газового теплоносителя в трубопроводе теплообменного аппарата.

При применении соответствующих выкладок будем иметь:

$$\sigma = \left(1 + \zeta \frac{W_2^2}{2RT_{02}}\right)^{-1} \quad (7)$$

Диссипацию работоспособности сжимаемых газовых теплоносителей в тру-

бопроводах теплообменников следует оценить с помощью коэффициентов потерь  $\zeta_{сж}$  при расчёте работы как адиабатической работы при сжатии, которая должна быть затрачена в целях восстановления полных давлений  $p_{02}$  до начальных давлений  $p_{01}$  [1; 6; 7; 11]:

$$\zeta_{сж} = \frac{l}{\frac{W_1^2}{2}} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{02} \left( \left( \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}{\frac{W_1^2}{2}} \quad (8)$$

Следовательно, при математическом моделировании течений газовых теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата для обеспечения необходимой степени приближения к действительному потоку и сложности необходимых вычислений с полным основанием можно остановить выбор на термодинамической модели докритического стационарного течения сжимаемых газов.

### Математическое моделирование характеристик течений газообразных теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата

Для энергоизолированных изоэнтропных потоков термодинамические характеристики газовых теплоносителей взаимосвязаны следующим образом ( $\gamma$  - показатель для изоэнтроп) [1; 6; 7; 11]:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right); \quad (9)$$

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad (10)$$

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (11)$$

Характеристики одномерных стационарных потоков на выходе в профилях 2-2 (рис. 1) газодинамических устройств теплообменных аппаратов (рассчитываются, когда известны характеристики на входах 1-1 при известной величине коэффициента восстановления полных давлений  $\sigma = p_{02}/p_{01}$ ) определяются из решения системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} p_{01}\sigma = p_{02} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_2^2}{\gamma RT_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ T_{01} = T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_2^2}{\gamma RT_2}\right); \\ G = A_2 \frac{p_2}{RT_2} W_2. \end{cases} \quad (12)$$

Данная система уравнений может быть применена для расчётов стационарных течений газовых теплоносителей при несколько более сложных структурах течений в тройном разветвлении (тройнике) трубопровода теплообменного аппарата.

Схемы данных течений газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов показаны на рис. 2.

Линии тока (пунктир на рис. 2) отвечают разделению потоков, втекающих в разветвления, на два, которые вытекают благодаря ответвлениям потоков.

На рис. 3 пунктир соответствует разделению линий тока при поточном слиянии.

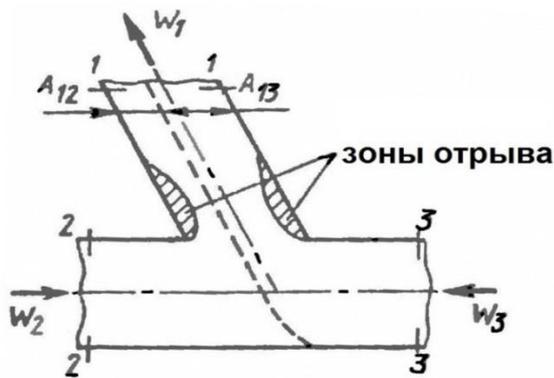


Рис. 3. Схема течений при слиянии потоков газовых теплоносителей в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов

Течения газов в разветвлённых трубопроводах теплообменных аппаратов характеризуются сложными пространственными структурами с неравномерными распределениями характеристик в профилях 2-2 и 3-3.

Принимается, что течения газовых теплоносителей влияния друг на друга практически не оказывают. Известны ве-

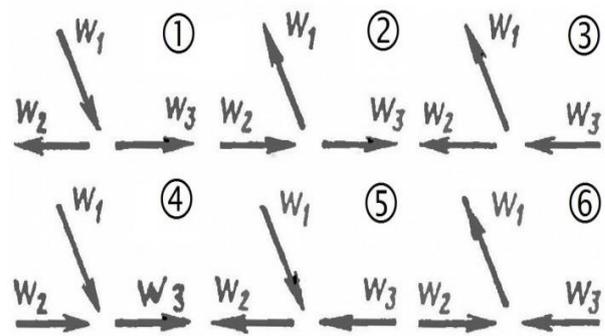


Рис. 4. Типичные схемы течения потоков газовых теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата

личины характеристик в профиле 1-1, а также коэффициенты восстановления  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ; берутся фактически одинаковыми давления в профилях 2-2 и 3-3.

Принятые допущения обуславливают запись системы трансцендентных уравнений для определения характеристик газовых теплоносителей в профилях 2-2 и 3-3:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{01}\sigma_1 = p_{02} = p_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_2^2}{\gamma RT_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ p_{01}\sigma_2 = p_{03} = p_3 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_3^2}{\gamma RT_3} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ T_{01} = T_{02} = T_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_2^2}{\gamma RT_2} \right); \\ T_{01} = T_{03} = T_3 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_3^2}{\gamma RT_3} \right); \\ G = A_2 \frac{p_2}{RT_2} W_2 + A_3 \frac{p_3}{RT_3} W_3; \\ p_2 = p_3. \end{array} \right. \quad (13)$$

Для предложенного моделирования одномерных стационарных течений в разветвлённых трубопроводах теплообменников следует ещё до решения определяющей системы уравнений назначить параметры и структуры, которые необходимо определить. Течение в трубопроводе теплообменного аппарата носит докритический характер, следовательно, нужно задать значения давлений в профилях 2-2 и 3-3 и две характеристики в профиле 1-1. Конкретный подбор независимых характеристик состояний газовых теплоносителей в рассматриваемых профилях разветвлений соответствует установленным законо-

мерностям потоков.

Характеристики течений газов в рамках одномерного моделирования слияния потоков и характеристики газовых теплоносителей должны согласовываться с условиями выравнивания их величин.

Постулируется, что между течениями газов, вытекающих через разные площади  $A_{12}$  и  $A_{13}$  в профиле 1-1 ( $A_1 = A_{12} + A_{13}$ ) (рис. 3), не происходит массообменных и теплообменных процессов, следовательно, они обладают разной плотностью и скоростью, но одинаковым давлением.

## Аналитическое решение задачи о течениях газообразных теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата

Течение газовых теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата происходит одновременно с турбулизированием и генерацией зон отрыва, что, в свою очередь, вызывает ощутимые потери механической энергии.

Количественные и качественные потери, а также структуры течений (при стационарном течении) в разветвлениях трубопровода теплообменника обычно устанавливаются на опытном основании.

В большинстве случаев изучению подвергаются характеристики для стационарного течения газов в трубопроводе теплообменного аппарата, поскольку основные режимы течения для данного условия - турбулентные стационарные.

Расширенным допущением при расчётах характеристик течений в трубопроводе теплообменника является постоянство формы канала и деления или слияния потоков газов (рис. 2, 3).

Граничные условия задаются следующим способом. Если граница открыта, то количество необходимых граничных условий равно количеству уходящих от данной границы характеристик, а граничные условия, требующиеся входным характеристикам, определяются решениями дифференциальных задач.

Следовательно, утверждая, что в профиле разветвления трубопровода теплообменного аппарата, прилегающего к патрубкам или ресиверам, нужные характеристики газовых теплоносителей уже известны, и исходя из предположения о задании граничных условий, можно обосновать исходную систему выражений для расчёта возможного случая для течений газовых теплоносителей в разветвлениях [1; 6; 7; 11].

Для деления потоков в трубопроводах теплообменных аппаратов (рис. 4.1) в профиле 3-3 следует задать 2 граничных условия, так как от данной границы уходят 2 характеристики; в профиле 2-2 следует задать давления  $p_2$  или скорости  $W_2$  и температуру  $T_2$ , так как положения характеристик сходны с профилем 3-3.

Главная система уравнений для рас-

сматриваемых случаев деления или слияния потоков в трубопроводах теплообменных аппаратов - система уравнений (13).

Варианты деления потока в трубопроводах теплообменных аппаратов, показанные на рис. 4.2, симметричны варианту на рис. 4.3, поэтому можно рассмотреть только первый случай.

В профиле 2-2 следует задать только 1 граничное условие, поскольку от этого профиля исходит лишь 1 характеристика. Равенство давления истекающего потока:  $p_1=p_3$ .

В профиле 1-1 определяемые характеристики - температура  $T_1$  и скорость  $W_2$  или давление  $p_1$ .

Далее следует рассмотреть задание граничных условий при слиянии потоков в трубопроводе теплообменного аппарата.

Алгоритмы расчёта слияния потоков в трубопроводе теплообменника для случаев на рис. 4.4 и 4.5 подобны, следовательно, можно рассмотреть лишь 1-й случай.

Для случая слияния потоков в трубопроводах теплообменных аппаратов, показанного на рис. 4.5, в профиле 2-2 следует задавать лишь 1 граничное условие, а в профиле 3-3 - 2 граничных условия.

Постулируется, что течения теплоносителей между профилями 1-1 и 2-2 не смешиваются, следовательно, неизвестными характеристиками служат площадь профиля  $A_{31}$  и площадь профиля  $A_{32}$ , причём  $A_{31}+A_{32}=A_3$ , что соответствует вытекающим через профиль 3-3 потокам газовых теплоносителей.

Постулируется, что температура  $T_{31}$  и температура  $T_{32}$ , а также скорость  $W_{31}$  и скорость  $W_{32}$  вытекающего потока разные, но в профиле 3-3 давления одинаковые; кроме того,  $p_2=p_1$ .

При учёте данных допущений основная система уравнений для расчётов течений газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов при слиянии потоков (рис. 4.6) выводится из главной системы (13):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{01}\sigma_1 = p_3 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{31}^2}{\gamma RT_{31}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ p_{02}\sigma_2 = p_3 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{32}^2}{\gamma RT_{32}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ T_{01} = T_{31} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{31}^2}{\gamma RT_{31}} \right); \\ T_{02} = T_{32} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{32}^2}{\gamma RT_{32}} \right); \\ G_1 = A_{31} \frac{p_3}{RT_{31}} W_{31}; \\ A_2 \frac{p_2}{RT_2} W_2 = (A_3 - A_{31}) \frac{p_3}{RT_{32}} W_{32}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Как граничное условие в профиле 2-2 известно давление  $p_2$ ; в профиле 1-1 известен ещё расход  $G_1$  газовых теплоносителей.

Неизвестные характеристики: скорости  $W_2, W_{31}, W_{32}$ ; температуры  $T_{31}, T_{32}$ ; площадь профиля  $A_{31}$ .

Следовательно, имеет место система из шести трансцендентных уравнений с шестью неизвестными параметрами.

Представленная система уравнений может быть решена аналитическим образом, несмотря на то что ранее постулировалось, что её можно решить лишь численным способом [6].

Для системы уравнений (14) имеется четыре аналитических решения.

Корректность решения системы (т.е. существование, единственность и устойчивость) заключается в следующем: решение сводится к уравнению четвёртой степени с действительными коэффициентами, имеющему четыре решения (в общем случае - комплексно-сопряжённые), которые и были получены в рамках данной статьи.

Решив систему, получим четыре корня. Физический смысл есть только у одного, которому после выкладок можно придать следующий вид:

$$\left[ \begin{array}{l} W_2 = \sqrt{1 - \left( \frac{p_{02}}{p_3} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \sqrt{R} \frac{(p_{02}\sigma_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_2}{A_2 p_2 \sqrt{T_{02}}} \left( A_3 \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} p_3^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\sqrt{R}(p_{01}\sigma_1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \sqrt{T_{01}} G_1}{\sqrt{1 - \left( \frac{p_{01}}{p_3} \sigma_1 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}}} \right); \\ W_{31} = \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma} RT_{01} \left( \left( \frac{p_{01}}{p_3} \sigma_1 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)}; \\ W_{32} = \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma} RT_{02} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_3} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)}; \\ T_{31} = T_{01} \left( \frac{p_{01}}{p_3} \sigma_1 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; \\ T_{32} = T_{02} \left( \frac{p_{02}}{p_3} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; \\ A_{31} = \frac{G_1}{p_3} \left( \frac{p_{01}}{p_3} \sigma_1 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} RT_{01}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{p_{01}}{p_3} \sigma_1 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Далее следует рассмотреть алгоритм расчёта слияния потоков в трубопроводе теплообменного аппарата для варианта, представленного на рис. 4.6.

В профилях 2-2 и 3-3 определяется только 1 граничное условие, поскольку определяющее условие для данного случая слияния потоков - условие тождественности давлений  $p_2=p_3$ , что и задано в форме граничных условий.

В этом случае необходимо задание

$$\left\{ \begin{aligned} p_{02}\sigma_2 &= p_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{12}^2}{\gamma RT_{12}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ p_{03}\sigma_3 &= p_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{13}^2}{\gamma RT_{13}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \\ T_{02} &= T_{12} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{12}^2}{\gamma RT_{12}} \right); \\ T_{03} &= T_{13} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{W_{13}^2}{\gamma RT_{13}} \right); \\ A_2 \frac{p_2}{RT_2} W_2 &= A_{12} \frac{p_1}{RT_{12}} W_{12}; \\ A_3 \frac{p_2}{RT_3} W_3 &= (A_1 - A_{12}) \frac{p_1}{RT_{13}} W_{13}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

В этом случае также имеется система из шести трансцендентных уравнений с шестью неизвестными параметрами.

Данную систему уравнений тоже можно решить аналитическим образом, хотя ранее говорилось, что её можно решить лишь численным способом [6].

одного неизвестного параметра - давления  $p_2$ .

Неизвестные параметры в профиле 1-1:  $W_{12}, W_{13}, T_{12}, T_{13}, A_{12}, A_{13}$  ( $A_1=A_{12}+A_{13}$ ).

При учёте представленных постулатов основная система уравнений для расчётов течений газовых теплоносителей в трубопроводах теплообменных аппаратов при слиянии течений (рис. 4.6) выводится из исходной системы (13):

Для системы уравнений (16) существует четыре аналитических решения. Решив систему (16), получим четыре корня, но физический смысл есть лишь у одного, которому в результате выкладок можно придать следующую форму:

$$\left[ \begin{aligned} p_2 &= \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} R \frac{A_1 p_1 \sqrt{\left( 1 - \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \left( 1 - \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right)}}{A_3 \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} W_3 \sqrt{\frac{T_{03}}{T_3}} \sqrt{1 - \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} + A_2 \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} W_2 \sqrt{\frac{T_{02}}{T_2}} \sqrt{1 - \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}}; \\ W_{12} &= \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma} RT_{02} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)}; \\ W_{13} &= \sqrt{\frac{2\gamma}{1-\gamma} RT_{03} \left( \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)}; \\ T_{12} &= T_{02} \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; \\ T_{13} &= T_{03} \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; \\ A_{12} &= \frac{A_1 \sqrt{1 - \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{p_{03}}{p_1} \sigma_3 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{A_3 (\sigma_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{A_2 (\sigma_3)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left( \frac{p_{02}}{p_{03}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{W_3 T_2 \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}}}{W_2 T_3 \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}}} \sqrt{1 - \left( \frac{p_{02}}{p_1} \sigma_2 \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}}}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Аналитические решения (15) и (17) были верифицированы численным способом, а также с применением компьютерных методов символьной математики.

При подобном задании граничных условий вопрос определения характеристик газовых теплоносителей в коленах трубопроводов теплообменников решается аналитическим образом проще, чем для тройников.

Представленные аналитические решения конкретных задач об объединении течений газового теплоносителя в трубопроводе теплообменного аппарата обуславливают генерацию подобных аналитических решений при разделении потока.

Следовательно, в данной статье удалось получить аналитическое решение задачи о течениях газовых теплоносителей в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов, применяемых в разных отраслях техники, в том числе в авиацион-

но-космической, судостроительной и т.д., несмотря на то что до этого были лишь численные решения данной задачи.

Полученное в настоящей статье решение может быть реализовано в форме конкретного расчёта без применения спецфункций, используемых для решения систем, в которых фигурируют нелинейные и трансцендентные уравнения [10].

Решение поставленной в статье узкой задачи получения параметров стационарного докритического течения газообразного теплоносителя в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов может быть использовано для независимой верификации с другими математическими моделями ([12] и др.) и указывает направления дальнейших исследований (задаче верификации модели может быть посвящена глава в кандидатской диссертации или тема дипломного проектирования).

## Выводы

1. Обоснован выбор теоретического метода для математического моделирования течений газовых теплоносителей в разветвлениях трубопровода теплообменного аппарата при допустимой степени приближённости к реальным течениям и сложности необходимых вычислений (термодинамическая модель докритических стационарных течений сжимаемых газов).

2. Получено аналитическое решение задачи о течениях газовых теплоносителей

в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов, которые находят применение в разных отраслях техники, несмотря на то что до этого были лишь численные решения данной задачи.

3. Сгенерированные в статье аналитические решения удалось получить без использования спецфункций, применяющихся для решения систем с нелинейными и трансцендентными уравнениями [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамович, Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. - М.: Наука, 1976. - 888 с.
2. Альтшуль, А.Д. Гидравлические сопротивления / А.Д. Альтшуль. - М.: Недра, 1982. - 224 с.
3. Идельчик, И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов. Подвод, отвод и распределение потока по сечению аппаратов / И.Е. Идельчик. - М.: Машиностроение, 1983. - 351 с.
4. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. - М.: Машиностроение, 1975. - 427 с.
5. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик; под ред. М.О.

Штейнберга. - М.: Машиностроение, 1992. - 672 с.

6. Круглов, М.Г. Газовая динамика комбинированных двигателей внутреннего сгорания / М.Г. Круглов, А.А. Меднов. - М.: Машиностроение, 1988. - 360 с.
7. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. - М.: Наука, 1987. - 840 с.
8. Справочник по расчётам гидравлических и вентиляционных систем / под ред. А.С. Юрьева. - СПб.: Мир и семья, 2001. - 1154 с.
9. Шевелёв, Ф.А. Таблицы для гидравлического расчёта стальных, чугунных, асбестоцементных, пластмассовых и стеклянных водопроводных

- труб / Ф.А. Шевелёв. - М.: Стройиздат, 1973. - 112 с.
10. Дубинов, А.Е. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков. - Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. - 160 с.
11. Лобанов, И.Е. К вопросу решения задачи о стационарном докритическом течении газообразного теплоносителя в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов / И.Е. Лобанов // *SCI-ARTICLE.RU*: электрон. журн. - 2016. - № 29. - С. 141-150.
12. Кузнецов, Ю.А. Исследование гидродинамических характеристик потока в Y-образных тройниках / Ю.А. Кузнецов, Е.С. Тарасов, Н.С. Смикалин // *Инновации и инвестиции*. - 2019. - № 3. - С. 194-196.
1. Abramovich, G.N. *Applied Gas Dynamics* / G.N. Abramovich. - M.: Science, 1976. - pp. 888.
2. Altschul, A.D. *Hydraulic Resistance* / A.D. Altschul. - M.: Nedra, 1982. - pp. 224.
3. Idelchik, I.E. *Aerohydrodynamics of Technological Devices. Supply, Removal and Distribution of Current According to Device Section* / I.E. Idelchik. - M.: Mechanical Engineering, 1983. - pp. 351.
4. Idelchik, I.E. *Reference Book on Hydraulic Resistances* / I.E. Idelchik. - M.: Mechanical Engineering, 1975. - pp. 427.
5. Idelchik, I.E. *Reference Book on Hydraulic Resistances* / I.E. Idelchik; under the editorship of M.O. Steinberg. - M.: Mechanical Engineering, 1992. - pp. 672.
6. Kruglov, M.G. *Gas Dynamics of Combined Internal Combustion Engines* / M.G. Kruglov, A.A. Mednov. - M.: Mechanical Engineering, 1988. - pp. 360.
7. Loytsyansky, L.G. *Liquid and Gas Mechanics* / L.G. Loytsyansky. - M.: Science, 1987. - pp. 840.
8. *Reference Book on Computations of Hydraulic and Ventilation Systems* / under the editorship of A.S. Yuriev. - S-Pb.: World and Family, 2001. - pp. 1154.
9. Shevelyov, F.A. *Tables for Hydraulic Computations of Steel, Iron, Asbestos Cement, Plastic and Glass Water Pipes* / F.A. Shevelyov. - M.: Stroyizdat, 1973. - pp. 112.
10. Dubinov, A.E. *Lambert W-function and Its Use in Mathematical Problems of Physics* / A.E. Dubinov, I.D. Dubinova, S.K. Saykov. - Sarov: RPN-ARRIEF, 2006. - pp. 160.
11. Lobanov, I.E. To the problem solution on stationary subcritical current of gaseous heat carrier in piping bifurcations of heat-exchange devices / I.E. Lobanov // *SCI-ARTICLE.RU*: electronic journal. - 2016. - No.29. - pp. 141-150.
12. Kuznetsov, Yu.A. Investigations of stream hydrodynamic characteristics in Y-shaped fittings / Yu.A. Kuznetsov, E.S. Tarasov, N.S. Smikalina // *Innovations and Investments*. - 2019. - No.3. - pp. 194-196.

Ссылка для цитирования:

Лобанов, И.Е. Теоретическое аналитическое решение задачи о стационарном докритическом течении газообразного теплоносителя в разветвлениях трубопроводов теплообменных аппаратов / И.Е. Лобанов // *Вестник Брянского государственного технического университета*. - 2019. - № 9. - С.25 – 35.

DOI: 10.30987/article\_5d9317b27868a4.78923465.

Статья поступила в редакцию 28.08.19

Рецензент: д.т.н., профессор ИМАШ РАН,  
член редсовета журнала «Вестник БГТУ»

Албагачиев А.Ю.

Статья принята к публикации 2. 09. 19.

#### Сведения об авторах:

**Лобанов Игорь Евгеньевич**, д.т.н., в.н.с. ПНИЛ-204, Московский авиационный институт (государственный технический университет), e-mail: [llobbaannooff@live.ru](mailto:llobbaannooff@live.ru).

**Lobanov Igor Evgenievich**, Dr. Sc. Tech., Leading researcher PNIL-204, Moscow Aircraft Institute (State Technical University), e-mail: [llobbaannooff@live.ru](mailto:llobbaannooff@live.ru).