

Трение и износ

УДК 519.3: 621.822

DOI: 10.12737/article_58f9c4d98171c0.05441349

М.В. Зернин, Н.Н. Рыбкин

**ТРЕХМЕРНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕМПЕРАТУРНОЙ, УПРУГОЙ И ТЕРМОУПРУГОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ
В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОГИДРОДИНАМИКИ УЗЛОВ ТРЕНИЯ**

Сформулированы требования в конечном элементу для моделирования поля температур, упругого и термоупругого деформирования деталей узлов трения. Приведены основные соотношения для аппроксимации искомых параметров в двадцатиузловом конечном элементе трехмерной задачи. Кроме совместных функций формы введены также внеузловые несовместные функции формы третьего порядка. На серии тестовых примеров продемон-

стрированы преимущества квазисовместных аппроксимаций. Показано, что такой конечный элемент будет эффективен при решении задач термоупруго-гидродинамики узлов трения.

Ключевые слова: узлы трения, задачи термоупруго-гидродинамики, поле температур, упругие деформации, термоупругие деформации, метод конечных элементов, функции формы, аппроксимирующий полином, тестовые задачи.

M. V. Zernin, N. N. Rybkin

**THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT FOR MODELLING THERMAL, ELASTIC
AND THERMOELASTIC COMPONENTS IN THE COUPLED PROBLEM OF FRICTION
UNITS THERMOELASTIC HYDRODYNAMICS**

The scheme for the solution of the coupled problem of friction units thermoelastichydrodynamics is given. It is noticed that one of the main ways for decreasing labor input of the task solution may be the choice of the rational finite element providing decision accuracy at a big aspect ratio. Twenty-nodal three-dimensional finite element is chosen and in this finite element not only second order joint shape functions but also the third order out-of-node not joint shape func-

tions are used. By using some test examples for temperature, elastic and thermoelastic problems the advantages of such quasi-joint finite elements in comparison with joint ones are shown.

Key words: friction units, problems of thermoelastichydrodynamics, temperature field, elastic deformations, thermoelastic deformations, finite element method, shape functions, approximating polynomial, test problems.

Постановка задачи

В Брянском государственном техническом университете развиваются [1 - 5] конечноэлементные методы расчета гидродинамики динамически нагруженных подшипников скольжения (ПС) на основе двухмерных уравнений Рейнольдса [6; 7]. В этих статьях изложены основные алгоритмы и варианты их реализации с учетом различных факторов, влияющих на гидродинамику ПС. В Роспатенте зарегистрирована [4] первая версия комплекса программ *BBFEM (Bearing Builder Finite Element Method)*, реализующая конечноэлементные алгоритмы при недеформируемых поверхностях ПС. Продолжается развитие методик расчетов гидродинамики ПС по нескольким направлениям. Одно из

направлений развития – учет влияния упругой податливости поверхностей. Во второй версии комплекса программ *BBFEM* реализована описанная в статье [3] приближенная методика учета податливости поверхностей. Выполняется подготовка к реализации третьей версии, в которой будет учтено неоднородное поле температур, а также упругие и термоупругие перемещения деталей ПС на основе трехмерного конечноэлементного моделирования. Опишем термоупруго-гидродинамическую задачу (ТУГД-задачу) подробнее на основе схемы (рис. 1).

Здесь мы не приводим математические формулировки отдельных задач. Для гидродинамической задачи такие формулировки и их конечноэлементные вариан-

ты приведены в работах [1-7]. Для температурной, упругой и термоупругой задач аналогичные формулировки описаны достаточно подробно в монографиях [8; 9].

Опишем здесь только взаимосвязи трех задач и основные итерационные процедуры, которые необходимо реализовать в ТУГД-задаче.

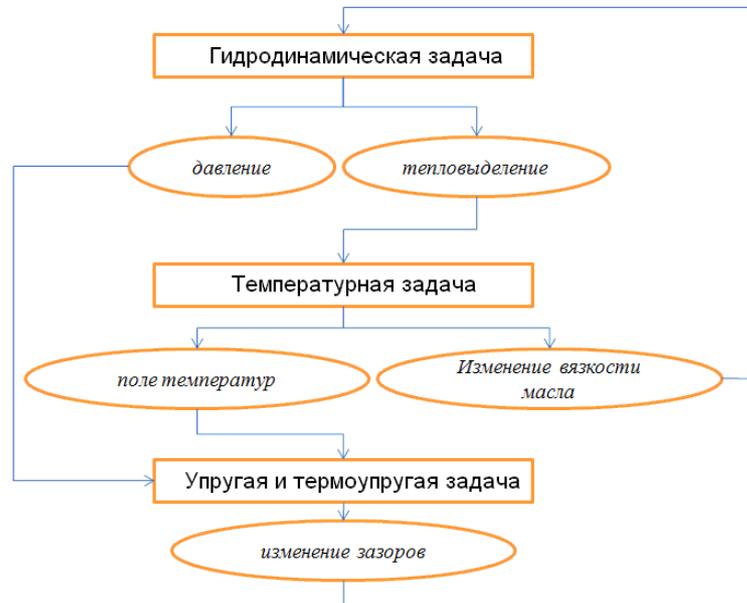


Рис. 1. Схема взаимодействия трёх типов задач

Если решать только гидродинамическую задачу (отыскание поля давлений в масляном слое при изотермических условиях и недеформируемых поверхностях), то реализуются [1-7] следующие нелинейные процедуры: поиск границ гидродинамического клина, обеспечение равновесия вала под действием внешней нагрузки и эпюры давлений. Если нагрузка на ПС динамическая, то задача обычно дискретизируется по временной координате и организуется переход от одного момента времени к другому по схеме одного из шаговых методов. Этот цикл является внешним по отношению к схеме, изображенной на рис. 1. Но часто условия нагружения в зоне гидродинамического контакта таковы, что поверхности трибоузла упруго деформируются от действия давлений. Также в масляном слое существенно повышается температура, причем поле температур может быть неоднородным. Это приводит к изменению вязкости масла и значимым термоупругим деформациям поверхностей. Требуется многократное решение указанных нелинейных задач в трехмерной постановке. Фактически гидродинамическая задача должна быть решена многократно, и трудоемкость решения такой ТУГД-задачи

возрастает во много раз.

Для компьютерной реализации алгоритма должны быть предусмотрены меры по повышению его эффективности, в том числе за счет выбора рационального типа конечных элементов (КЭ) для температурной и упругой (термоупругой) задач. Кроме того, в трибоузлах часто имеются антифрикционные слои, толщина которых значительно меньше их размеров в других направлениях. Чтобы учесть при расчете свойства этих слоев, необходимо использовать КЭ, допускающие большие соотношения сторон без потери точности расчетов. При использовании квазисовместных аппроксимаций [10] можно эффективно разрешить эту проблему и снизить трудоемкость решения ТУГД-задачи более чем на порядок. Фактически появляется возможность подойти к решению нового класса задач: центр внимания можно переместить на более точное описание слоя жидкости с учетом неоднородности полей температур и деформаций. При этом можно удовлетворить противоречивые требования к сеткам КЭ: площадку контакта разбивать из соображений точности расчета параметров взаимодействия и определения ее границ, объемные детали с тонкими

слоями можно моделировать малым количеством КЭ.

Двадцатиузловой трехмерный конечный элемент с совместными и квазисовместными аппроксимациями

Методика построения двадцатиузлового трехмерного КЭ для решения температурной, упругой и термоупругой задач с совместными аппроксимациями достаточно подробно описана в монографиях [8; 9]. Концепцию изопараметричности для координат $\{r\} = \{r_1 \dots r_g\}$ и перемещений $\{\delta\} = \{\delta_1 \dots \delta_d\}$ произвольной точки элемента можно отразить зависимостями

$$\begin{cases} \{r(\{p\})\} = \sum_{i=1}^n N_i(\{p\}) \{r_i\}, \\ \{\delta(\{p\})\} = \sum_{i=1}^n N_i(\{p\}) \{\delta_i\}, \end{cases}$$

где $N_i(\{p\})$ - совместные функции формы изопараметрических элементов; $\{p\} = \{p_1 \dots p_m\}$ - криволинейные координаты; $\{r_i\} = \{r_{1i} \dots r_{gi}\}$ - векторы узловых координат; $\{\delta_i\} = \{\delta_{1i} \dots \delta_{di}\}$ - векторы узловых перемещений; n - число узлов элемента.

Криволинейные координаты $p_j (j=1 \dots m)$ являются безразмерными переменными, изменяющимися на отрезке $[-1; +1]$, причем единичные значения эти координаты имеют на границах элемента. На рис. 2 изображен двадцатиузловой конечный элемент второго порядка в прямоугольной системе координат (рис. 2а) и он же в криволинейной системе координат (рис. 2б). На рис. 2а изображены также компоненты векторов поля перемещений и узловых степеней свободы произвольного по форме элемента объемного тела.

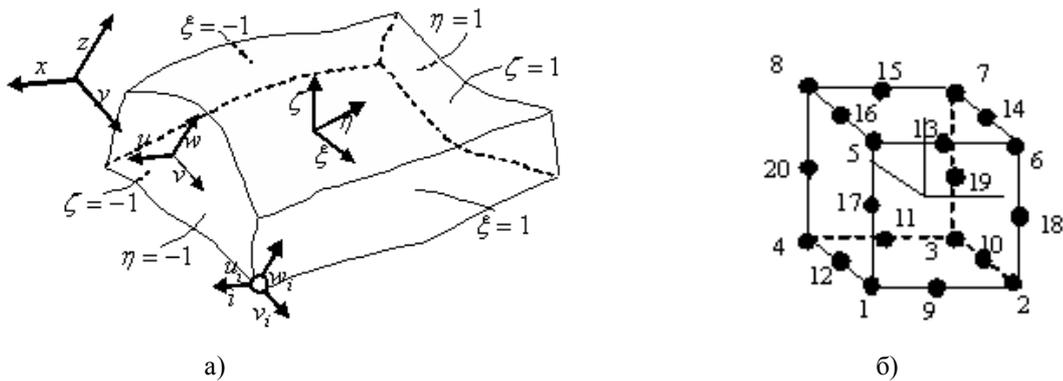


Рис. 2. Системы координат и перемещения произвольного по форме двадцатиузлового конечного элемента в глобальной (а) и локальной (б) системах координат

Каждая из функций формы $N_i (i=1 \dots n)$ принимает значение, равное единице, в i -м узле и нулевые значения в остальных узлах элемента. Свойство совместности означает, что у элементов с общей границей перемещения во всех ее точках будут совпадать, так как узловые перемещения этих элементов одни и те же. На каждой стороне изопараметрического элемента расположено определенное число узлов. Считается, что элемент имеет порядок s , если на его стороне расположено $s+1$ узлов. Согласно рассмотренной математической модели [8; 9] был построен совместный двадцатиузловой изопараметрический элемент. Нумерация его узлов представлена на рис. 2б, функции формы

приведены в табл. 1. Здесь $\xi_0 = 1 + \xi \xi_i$, $\eta_0 = 1 + \eta \eta_i$, $\zeta_0 = 1 + \zeta \zeta_i$.

Таблица 1.

Совместные функции формы двадцатиузлового элемента

Номера узлов i	Функции формы N_i	ξ_i	η_i	ζ_i
1,2...8	$\xi_0 \eta_0 \zeta_0 (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0) / 8$	± 1	± 1	± 1
9,11,13,15	$\eta_0 \zeta_0 (1 - \xi^2) / 4$	0	± 1	± 1
10,12,14,16	$\xi_0 \zeta_0 (1 - \eta^2) / 4$	± 1	0	± 1
17,18,19,20	$\xi_0 \eta_0 (1 - \zeta^2) / 4$	± 1	± 1	0

В квазисовместных КЭ [10] кроме приведенных в табл. 1 совместных функций формы использованы также для аппроксимации полей перемещений дополнительные функции формы $N_1^* = (\xi^3 - \xi)/6$, $N_2^* = (\eta^3 - \eta)/6$ и $N_3^* = (\zeta^3 - \zeta)/6$, связанные с внеузловыми внутренними степенями свободы элементов. Эти дополнительные функции формы нарушают совместное распределение перемещений на границах элементов и являются несовместными. Важно, что дополнительные функции формы содержат третьи степени относительных координат. В совместном КЭ перемещения представляются полным полиномом второй степени и имеют некоторые дополнительные слагаемые из полиномов третьей и четвертой степеней. При введении дополнительных функций формы получаем полный полином третьей степени с дополнительными слагаемыми из полинома четвертой степени. Именно из-за повышения степени аппроксимации перемещений квазисовместный КЭ точнее совместного при том же количестве узлов.

Таким образом, формулировка семейства квазисовместных элементов может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} \{r(\{p\})\} = \sum_{i=1}^n N_i(\{p\})\{r_i\}, \\ \{\delta(\{p\})\} = \sum_{i=1}^n N_i(\{p\})\{\delta_i\} + \sum_{j=1}^m N_j^*(\{p\})\{\delta_j^*\}, \end{cases}$$

где $N_j^*(\{p\})$ - дополнительные несовместные функции формы, содержащие переменные p_j^{s+1} ; $\{\delta_j^*\} = \{\delta_{1j}^* \dots \delta_{dj}^*\}$ - векторы внеузловых перемещений, связанные с несовместными функциями; s, m - порядок и размерность элемента.

Итак, в квазисовместных элементах на совместное поле перемещений, выраженное через узловые степени свободы, наложено несовместное поле, отнесенное к внеузловым степеням свободы, а аппроксимация геометрической формы при этом остается прежней. Поскольку несовместное поле не связано с перемещениями узлов, то несовместные функции формы во

всех узлах КЭ обращаются в ноль. Окончательно условия для назначения дополнительных функций формы квазисовместных элементов можно выразить так: для элементов порядка s в полиномиальном представлении функций $N_j^*(j=1 \dots m)$ должны содержаться члены с переменными p_j^{s+1} ; необходимо, чтобы во всех узлах элемента функции N_j^* принимали нулевые значения.

Общий вид матрицы жёсткости любого КЭ:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dv.$$

Матрица жёсткости для квазисовместного конечного элемента, полученная в работе [10] путём минимизации полной энергии элемента и исключения внеузловых перемещений, имеет вид

$$[K^{(e)}] = [K] - [K^*]^T [K^{**}]^{-1} [K^*].$$

Отдельные блоки матрицы жёсткости элемента вычисляются по формулам

$$[K] = \int_{\tau} [B]^T [D] [B] |J| d\tau,$$

$$[K^*] = \int_{\tau} [B^*]^T [D] [B] |J| d\tau,$$

$$[K^{**}] = \int_{\tau} [B^*]^T [D] [B^*] |J| d\tau.$$

где τ - единичная область элемента, соответствующая локальным координатам; $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$; $|J|$ - определитель матрицы Якоби; $[B]$ и $[B^*]$ - матрицы производных соответственно совместных и несовместных функций формы по координатам.

В результате имеем матрицу жёсткости для двадцатиузлового квазисовместного изопараметрического конечного элемента такого же размера (60 на 60), что и у совместного элемента, а степень аппроксимации повышена до третьей.

Тестирование двадцатиузлового конечного элемента с совместными и квазисовместными аппроксимациями

Осуществлена программная реализация таких КЭ для температурной, упругой и термоупругой задач. То есть построены все матрицы, требуемые для решения этих задач, реализованы зависимости для при-

ведения достаточно общих граничных условий (распределенных по поверхности воздействий) к узловым значениям. Выполнены проверки так называемых обязательных условий и решена система тестовых задач, позволяющая сопоставить точность совместных и квазисовместных КЭ. Причем особое внимание уделялось выявлению допустимого соотношения сторон КЭ, так как в узлах трения имеются тонкие антифрикционные слои. Кратко опишем результаты тестирования (часть тестовых расчетов выполнена инженером И.В. Васильченко).

Поле температур в стержнях

Решены две задачи о распределении температуры в стержне [11], результаты приведены на рис. 3. В первой задаче заданы постоянная температура на левом конце и конвективный теплоотвод по всей остальной поверхности стержня (рис. 3а). Во второй задаче задана постоянная температура на левом конце, теплоизолирован правый конец стержня и задан конвективный теплоотвод по всей остальной поверхности (рис. 3б). Полином третьей степени, реализованный в квазисовместном КЭ, такие поля температур описывает точно.

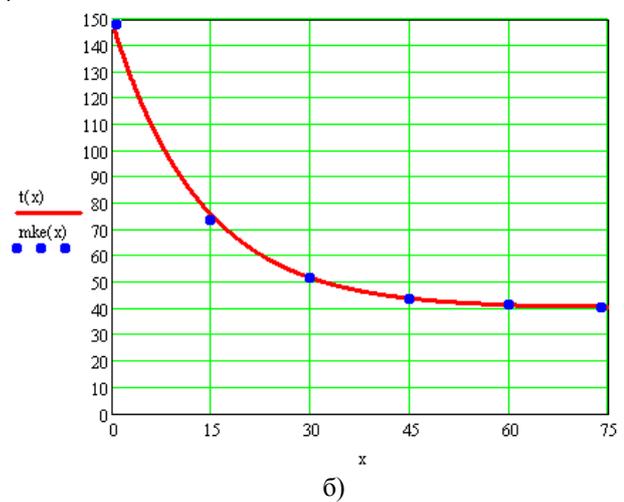
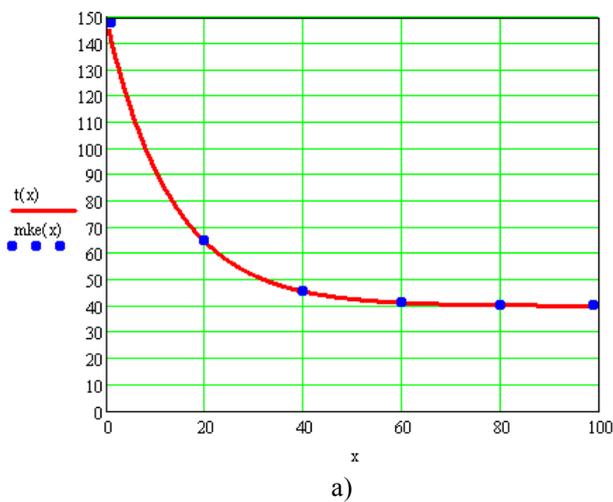


Рис. 3. Результаты тестирования задач о поле температур в стержнях (сплошные линии – аналитическое решение, точки – результат решения МКЭ)

Поле температур в трехслойном кольце

Решена задача о распределении температуры в трёхслойном кольце с конвективным теплообменом на внешней и внутренней поверхностях и теплоизолирован-

ной боковой поверхностью [11]. Схема представлена на рис. 4, а результаты тестирования приведены в табл. 2. Видно, что задача решена точно.

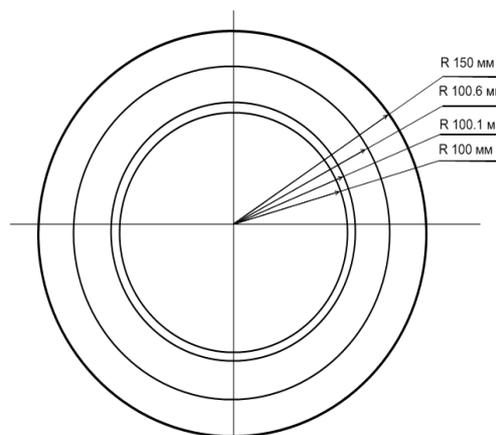


Рис. 4. Схема трехслойного кольца

Таблица 2.

Результаты решения температурной задачи для трехслойного кольца

Радиус R , мм	Аналитические значения температуры, °C	Значения температуры, полученные по МКЭ, °C	Погрешность δ , %
100	34,481	34,481	0,000259
100,05	34,443	34,443	0,0001635
100,1	34,253	34,2531	0,0002215
100,35	34,064	34,0637	0,0001992
100,6	17,35	17,3444	0,034
125,3	3,654	3,65385	0,001527

Задачи об изгибе стержней

К правому концу консольно закреплённой балки приложена сосредоточенная нагрузка [12-14]. Модель из одного двадцатиузлового КЭ показана на рис. 5. Для всех изложенных здесь тестовых задач поперечные размеры балки составляли 10 мм в высоту и 10 мм в ширину. Задача решена

почти точно (погрешность менее процента) при использовании квазисовместного КЭ с отношением его длины к высоте от 10:1 до 1000:1. Упругая линия балки является уравнением третьего порядка от продольной координаты y . Аппроксимация перемещений в указанных КЭ также является функцией третьего порядка.

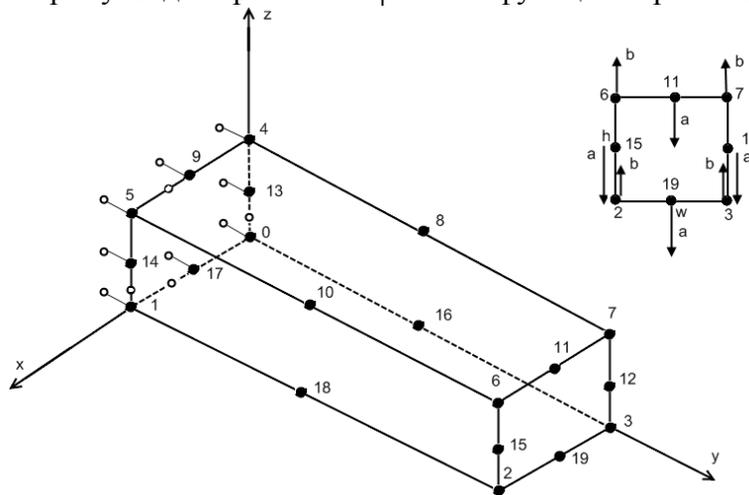


Рис. 5. Конечноэлементная модель консольно закрепленной балки из одного элемента

На примере следующих тестовых задач показаны преимущества использования квазисовместного элемента по сравнению с совместным. К консольно закреплённой балке приложена постоянная распределённая нагрузка интенсивностью q . Аналитическое решение для упругой линии [12; 14] является уравнением четвертой степени относительно продольной координаты. Результаты расчёта для нескольких длин представлены в табл. 3. Видно, что при отношении длины стержня к его поперечному размеру 5:1 погрешность сравнительно велика. Этот факт можно объяснить погрешностью представления такого объекта балкой. При увеличении длины балки погрешность моделирования совместным КЭ возрастает.

А при моделировании квазисовместным КЭ погрешность мала даже при отношении сторон 10000:1. Значит, квазисовместный КЭ, в котором аппроксимация перемещений является полиномом третьей степени (с некоторыми составляющими от полинома четвертой степени), рациональней применять при большем отношении сторон КЭ.

При моделировании задачи двумя конечными элементами (по продольной координате балки) совместный элемент также не позволяет получить решение с достаточной точностью. Результаты для двух конечных элементов приведены в табл. 4. Точность выше, чем при моделировании одним КЭ, но все равно недостаточна.

Таблица 3.

Результаты расчёта перемещений по модели из одного конечного элемента для консольно закреплённой балки, нагруженной равномерной нагрузкой

Длина балки L , мм	Аналитические значения перемещений, мм	Совместный КЭ: перемещения, мм	Квазисовместный КЭ: перемещения, мм	δ совм, %	δ кв.совм, %
50	0,0047	0,003868	0,004924	17,709	4,757
100	0,075	0,054	0,076	28,533	1,2
200	1,2	0,815	1,204	32,042	0,311
500	46,875	31,439	46,898	32,93	0,05
1000	750	500,397	750,094	33,28	0,013
10000	7500000	4992000	7482000	33,438	0,241

Таблица 4.

Результаты расчёта по модели из двух конечных элементов

Длина балки L , мм	Аналитические значения перемещений, мм	Один совместный КЭ: перемещения, мм	δ совм, %	Два совместных КЭ: перемещения, мм	δ совм, %
50	0,0047	0,003868	17,709	0,004797	2,074
100	0,075	0,054	28,533	0,071	4,683
200	1,2	0,815	32,042	1,107	7,782
500	46,875	31,439	3,93	42,676	8,957
1000	750	500,397	33,28	681,435	9,142
10000	7500000	4992000	33,438	6803000	9,289

Если к консольно закреплённой балке приложена линейно убывающая распределённая нагрузка (рис. 6а), то уравнение упругой линии [12; 14] является уравнением пятого порядка относительно продольной координаты. Поэтому одним КЭ такую задачу моделировать нельзя. Конечноэле-

ментное моделирование проводится двумя, последовательно соединёнными элементами. Результаты приведены в табл. 5. Видно, что квазисовместные КЭ моделируют эту задачу точнее, чем совместные. Выполнены также расчеты при моделировании тремя КЭ, результаты точнее.

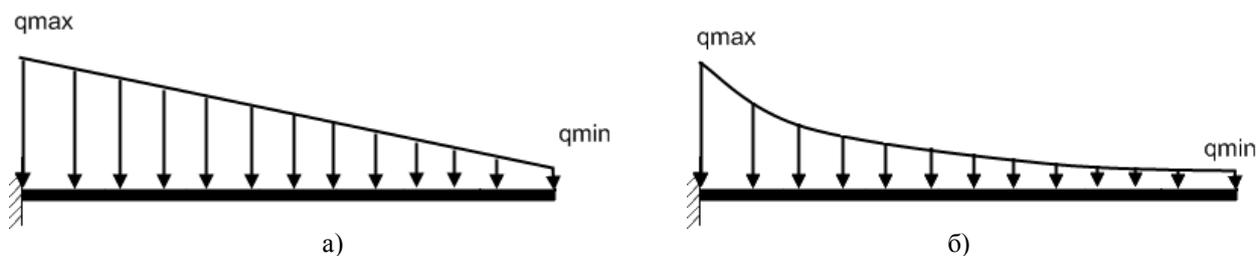


Рис. 6. Расчётные схемы консольно закреплённой балки, нагруженной распределённой нагрузкой по линейному закону (а) и по закону второго порядка (б)

Таблица 5.

Результаты расчёта по схеме на рис. 6а для модели из двух конечных элементов

Длина балки L , мм	Аналитические значения перемещений, мм	Два совместных КЭ: перемещения, мм	Два квазисовместных КЭ: перемещения, мм	δ совм, %	δ кв.совм, %
50	0,007187	0,006953	0,007175	3,255	0,17
100	0,12	0,102	0,109	14,757	8,826
200	1,84	1,576	1,73	14,359	5,979
500	7,88	60,663	67,356	15,605	6,294
1000	1150	968,372	1077	15,794	6,332

Если к консольно закреплённому брусу приложена квадратично убывающая распределённая нагрузка (рис. 6б), то уравнение упругой линии является уравнением шестой степени относительно продольной координаты [12; 14]. Поэтому ко-

нечноэлементное моделирование проводится тремя последовательно соединёнными элементами. Результаты тестирования приведены в табл. 6. Заметны преимущества квазисовместных КЭ.

Таблица 6.

Результаты расчёта по схеме на рис. 6б для модели из трёх конечных элементов

Длина балки L, мм	Аналитические значения перемещений, мм	Три совместных КЭ: перемещения, мм	Три квазисовместных КЭ: перемещения, мм	δ совм, %	δ кв.совм, %
50	0,007187	0,007277	0,007333	1,255	2,025
100	0,12	0,11	0,112	8,707	6,823
200	1,84	1,707	1,768	7,251	3,903
500	71,88	65,838	68,846	8,406	4,221
1000	1150	1051	1101	8,6	4,259

Задачи о трубе под воздействием давлений

Решены три задачи о трубе, на которую действуют внешние (рис. 7а), внутренние (рис. 7б) и оба этих вида (рис. 7в) давлений [15]. Конечноэлементная модель

1/8 трубы представлена на рис. 7г. По толщине трубы взят всего один слой квазисовместных КЭ. Погрешности решения таких задач не превышали 1 %. Квазисовместные КЭ хорошо моделируют такие задачи.

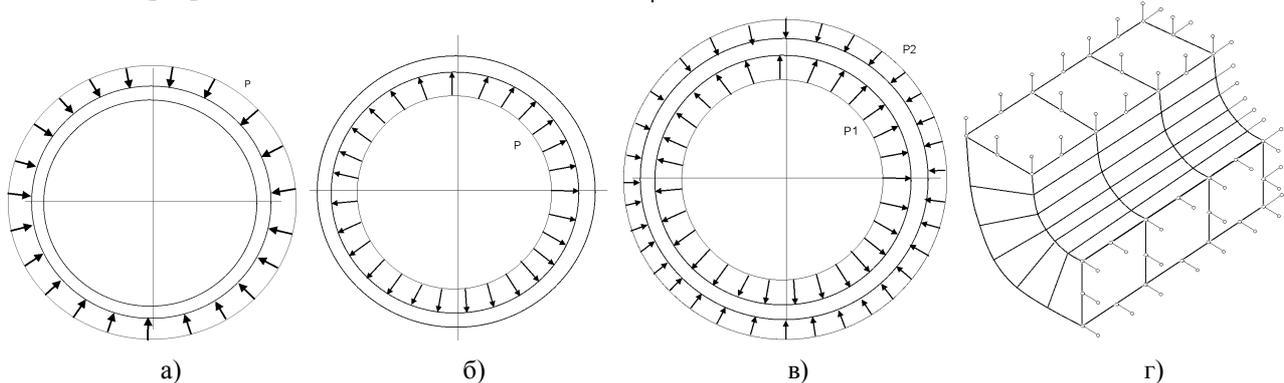


Рис. 7. Расчётная схема трубы под действием внешних (а), внутренних (б) давлений и при совместном их действии (в), а также конечноэлементная модель трубы (г)

Термоупругая задача о нагреве биметаллической (двухслойной) трубы

Рассмотрены случай равномерного нагрева биметаллической трубы [15] и конвективного теплообмена на внутренней и внешней поверхностях. Схема представлена на рис. 8а, результаты решения этих двух вариантов задачи - на рис. 8б и 8в соответственно. Погрешность моделирования задачи квазисовместными КЭ не превышает 1 %.

Выводы

Результаты сравнительного тестирования показывают, что квазисовместный КЭ превосходит совместный КЭ по точно-

сти моделирования нескольких типов задач. Этот элемент, как и предполагалось при его построении, позволяет повысить точность решения задач об изгибе балок. При решении других типов задач этот КЭ также показал высокую точность. Важно, что точность решения сохраняется для больших отношений сторон КЭ. Можно надеяться, что применение такого КЭ в ТУГД-задаче позволит повысить эффективность решения: сохранится точность при моделировании деталей трибоузла крупными конечноэлементными сетками. В целом трудоемкость решения ТУГД-задачи может существенно снизиться.

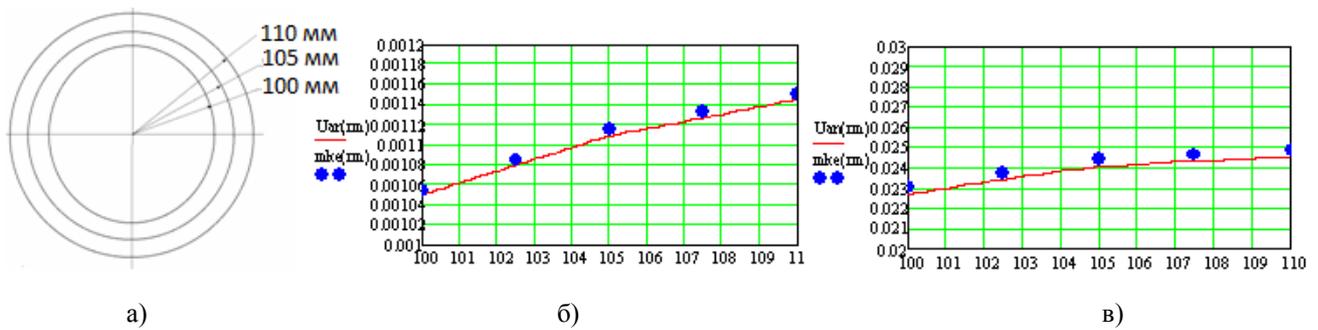


Рис. 8. Схема рассчитываемой трубы (а) и результаты расчетов термоупругих перемещений при задании конвективного теплообмена на внутренней (б) и внешней (в) поверхности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мишин, А.В. Конечноэлементная методика расчета динамически нагруженных подшипников скольжения с учетом отклонений формы рабочей поверхности от цилиндрической / А.В. Мишин, М.В. Зернин // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2008. - № 2. – С. 43-54.
2. Зернин, М.В. Методика расчетной оценки предельных размеров дефектов поверхностей подшипников скольжения по критерию влияния их на параметры гидродинамики / М.В. Зернин, А.В. Мишин, Н.Н. Рыбкин // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2013. - № 3. - С.14-23.
3. Рыбкин, Н.Н. Реализация методики расчетной оценки параметров гидродинамики подшипников скольжения с учетом радиальной податливости поверхностей / Н.Н. Рыбкин, М.В. Зернин// Вестник Брянского государственного технического университета. - 2013. - № 4. - С. 59-65.
4. Программа для ЭВМ «Bearing Builder Finite Element Method»/ А.В. Мишин, М.В. Зернин, Н.Н. Рыбкин, С.М. Шалыго, В.В. Сопранцов. – № 2014610341зарегистр. в Федер. службе по интел. собств. (Роспатент) 09.01.14.
5. Зернин, М.В. Гидродинамический анализ подшипников скольжения. Ч. 1: Учет нецилиндричности рабочих поверхностей/ М.В.Зернин, А.В. Мишин, Н.Н.Рыбкин, С.В. Шилько //Трение и износ. - 2014, Т. 35.- № 5.- С. 584- 595.
6. Букер, Д.Ф. Применение метода конечных элементов в теории смазки: инженерный подход / Д.Ф. Букер, К.Х. Хюбнер // ТАОИМ. Проблемы трения и смазки. – 1972. - № 4. - С. 22-33.
7. Генка, П.К. Динамически нагруженные радиальные подшипники. Расчет методом конечных элементов / П.К. Генка // ТАОИМ. Проблемы трения и смазки. – 1984. - № 4. – С. 10-20.
8. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей/ Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.
9. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: [Пер с англ.] / О. Зенкевич, К. Морган.- М.: Мир,
1. Mishin A.V. Finite element method of calculation of dynamically loaded sleeve bearings with discrepancies from cylindrical working surface / A.V. Mishin, M.V. Zernin // Assembly in machine and instrument building. – 2008. - №. 2. – P. 43-54.
2. Zernin, M.V. Methodology for estimation of limiting extent of surface defects of sliding bearings based on the criterion of their influence on hydrodynamics parameters / M.V. Zernin, A.V. Mishin, N.N. Rybkin // Bulletin of Bryansk State Technical University. - 2013. - №. 3. - P. 14-23.
3. Rybkin, N.N. Techniques of estimation of hydrodynamics parameters of sliding bearings with the influence of the radial surface suppleness / N.N. Rybkin, M.V. Zernin // Bulletin of Bryansk State Technical University. - 2013. - №. 4. - P. 59-65
4. Computer program "Bearing Builder Finite Element Method" / A.V. Mishin, M.V. Zernin, N.N. Rybkin, S.M. Shalygo, V.V. Soprantsov. – №. 2014610341 registered in The Federal Service of Intellectual Property (Rospatent) 09.01.14
5. Zernin, M.V. Hydrodynamic analysis of friction bearings. Part 1: Consideration of noncylindrical working surfaces / M.V. Zernin, A.V. Mishin, N.N. Rybkin, S.V. Shilko // Friction and wear. - 2014, T. 35. - №. 5. - P. 584 - 595.
6. Booker, D.F. Application of the finite element method in lubricating theory: engineering approach / D.F. Booker, K.H. Hubner // TAOIM. Problems of friction and greasing. – 1972. - №. 4. - P. 22-33.
7. Genka, P.K. Dynamically loaded journal bearings. The finite element method calculation / P.K. Genka // TAOIM. Problems of friction and greasing. – 1984. - №. 4. – P. 10-20.
8. Shabrov, N.N. Finite element method in calculations of heat engines parts / N.N. Shabrov. – L.: Mechanical engineering, 1983. – 212 p.
9. Zenkevich, O. Finite elements and approximation: [transl. from English] / O. Zenkevich, K. Morgan. -

- 1986.-318 с.
10. Макеев, Е.Г. Конечноэлементная база для проектирования авиационных конструкций: автореф. дис. канд. техн. наук./ Е.Г. Макеев. - Куйбышев, 1989. – 20 с.
11. Кутателадзе, С.С. Справочник по теплопередаче / С.С. Кутателадзе, В.М. Боришанский. – М; Л.: Гос. энергет. изд. – во, 1958.- 417 с.
12. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
13. Матвеев, Н.П. Напряжённое состояние при изгибе консоли в форме параллелепипеда/ Н.П. Матвеев // Прикладная механика. – 1974. – Т. X, -№ 9. С. 257 – 264.
14. Лазарян, В.А. Техническая теория изгиба / В.А. Лазарян. - Киев: Наукова думка, 1976. - 297 с.
15. Тимошенко, С.П. Теория упругости: [Пер с англ.] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. - М.: Наука, 1975.- 576 с.
- M.: World, 1986.-318 p.
10. Makeev, E.G. Finite-element base for designing aircraft structures: Thesis for Can.Eng.Degree / E.G. Makeev. - Kuibyshev, 1989. – 20 p., I.V. Lavrov // Abrasives. – 1971. - №. 1. – P. 1-4.
11. Kutateladze, S.S. Reference Book on heat transfer / S.S. Kutateladze, V.M. Borishansky. – M; L.: State Energy Publishing House, 1958. - 417 p.
12. Boyarshinov, S.V. Basics of machines structural mechanics / S.V. Boyarshinov – M.: Mechanical engineering, 1973. – 456 p.
13. Matveev, N.P. Strained condition in case of cantilever bending in the shape of a parallelepiped / N.P. Matveev // Applied Mechanics. – 1974. – Т. H, -№ 9. - P. 257 – 264.
14. Lazaryan, V.A. Technical theory of a bend / V.A. Lazaryan. - Kiev: Naukova Dumka, 1976. - 297 p.
15. Tymoshenko, S.P. Elasticity theory: [transl. from English] / S.P. Tymoshenko, J. Gudyer. - M.: Science, 1975. - 576 p.

Статья поступила в редколлегию 10.08.2016.

Рецензент: д.т.н., профессор кафедры «Механика, динамика и прочность машин», заслуженный деятель науки и техники РФ Кеглин Борис Григорьевич

Сведения об авторах:

Зернин Михаил Викторович

канд. техн. наук, доцент
кафедры "Информатика
и программное обеспечение"
Брянского государственного
технического университета,
телефон: (4832) 56-09-84,
E-mail: zerninmv@mail.ru

Рыбкин Николай Николаевич

аспирант кафедры "Механика и ДППМ"
Брянского государственного
технического университета,
телефон: (4832) 56-08-10,
E-mail: mikolai@mks.ru

Zernin Mikhail Viktorovich,

Can.Eng., Assistant Prof.
of the Dep."Computer Science and Software"
Bryansk State Technical University

Rybkin Nikolay Nikolaevich,

Post graduate student of the Dep.
"Mechanics, Dynamics and Strength of machines "
Bryansk State Technical University