

УДК 621.565.9
DOI: 10.12737/22051

И.Е. Лобанов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА ВАКУУМНОГО ЗАМОРАЖИВАНИЯ ЖИДКОСТИ В СПОКОЙНОМ СОСТОЯНИИ

Получено обобщённое аналитическое решение задачи о процессе вакуумного замораживания жидкости в спокойном состоянии относительно толщины слоя намораживания ξ . Рассмотрено ре-

шение задачи образования тонкого слоя водного льда в герметичной вакуумируемой полости.

Ключевые слова: теплообмен, вакуумное замораживание, охлаждение, жидкость, аналитический метод.

I.E. Lobanov

THEORETICAL ANALYTICAL METHOD IN PROBLEM SOLUTION OF LIQUID VACUUM FREEZING IN QUIET STATE

A generalized closed analytical solution of the problem of a quasi-stationary process in liquid vacuum freezing in a quiet state with regard to the thickness of the frosting layer ξ whereas heretofore numerical solutions of this problem occurred. The advantage of the analytical solutions obtained of the problem of a quasi-stationary vacuum freezing of moisture in a fine-dispersion state over existing numerical ones consists

in the identification of an immanent tie between defining and determined parameters regarding a thickness of the frosting layer ξ . It is also possible to use them directly at the computation without resorting to the help of computers.

Key words: heat exchange, vacuum freezing, cooling, liquid, analytical method.

Введение. Основные аспекты применения вакуумной техники в холодильных установках

В настоящее время в холодильных парокомпрессионных установках в качестве хладагентов применяют в основном хладоны и аммиак, термодинамические свойства которых позволяют осуществлять производство холода в широком диапазоне низких температур и, в большинстве случаев, при системном давлении больше атмосферного [1-3].

При давлениях, близких к атмосферному, возможна генерация внештатных режимов работы испарителя холодильной установки, которые опасны для всей холодильной установки, так как возможно проникновение в систему атмосферного воздуха.

При понижении давления на всасывании вплоть до атмосферного давления часто предусматривается отключение компрессора за счёт схемы автоматизации.

Общая энергетическая эффективность и коэффициент подачи компрессора

при работе холодильной установки в вакуумном режиме существенно снижаются.

Существующие в настоящее время хладагенты не могут полностью обеспечить выполнение экологических, токсикологических, санитарных, экономических требований.

Альтернативными рабочими веществами для холодильных парокомпрессионных установок могут служить вещества низкого давления, а именно: вода, рассолы, спирты, эфиры.

Использование воды как хладагента при рабочих давлениях ниже атмосферного реализуется в пароежекторных холодильных установках с пароструйными вакуумными насосами, которые, особенно при малой производительности, могут не удовлетворять требованиям по компактности, мобильности и т.п.

Следовательно, использование вакуумных насосов, отличных от струйных принципом действия, обуславливает гене-

рацию мобильных холодильных установок на воде или водяном паре.

Исчерпывающий аналитический обзор средств вакуумной откачки приведён в [1-3].

Математическая модель процесса вакуумного замораживания жидкости в спокойном состоянии

Постановка задачи исследования выглядит следующим образом.

Рассматривается замкнутая герметичная полость; внутри полости находится жидкость, например вода, в спокойном состоянии при температуре, близкой к 0°C. Предположительно при подаче воды в вакуумируемую полость расход воды таков, что при подлёте капель к днищу полости они охлаждаются примерно до 0°C.

Вакуумирование полости происходит со скоростью S , которая остаётся неизменной в диапазоне давления при образовании массива льда, что обосновано с физической точки зрения при спецподборе средств вакуумной откачки для конкретных свойств замораживаемой жидкости.

Граничное условие на границе лёд - паровая полость выглядит следующим образом:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = S^* \rho'' (L + r) = m(L + r) \frac{dT}{dt},$$

где λ — коэффициент теплопроводности льда в состоянии таяния; T — температура; S^* — эффективная скорость откачки на единицу площади сечения вакуумируемой полости; ρ'' — плотность насыщенных паров воды; L — теплота замерзания; r — теплота испарения; m — масса; τ — время; x — координата, отсчитываемая от внешней поверхности ледяного массива, имеющего глубину промерзания ξ , в сторону замораживаемой жидкости.

Граничное условие на границе лёд - вода выглядит следующим образом:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\xi} = L \frac{d\xi}{d\tau} \rho_L,$$

где ρ_L — плотность льда жидкости.

Вышесказанное обуславливает актуальность математического моделирования процесса вакуумного замораживания жидкости в спокойном состоянии.

В дальнейшем моделирование квазистационарного вакуумного замораживания влаги в мелкодисперсном состоянии будем проводить методом Лейбензона, успешно использованным автором для аналитического решения задачи намораживания на поверхностях различной кривизны [4-20], на основании которого следует принять распределение температуры в плоском слое льда как стационарное распределение температуры.

Стационарное распределение температуры в полой ледяной сфере выглядит следующим образом:

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{\xi}, \quad (1)$$

где T_1 — температура замерзания; T_0 — температура поверхности льда на границе раздела лёд - паровая полость.

Плотность паров влаги выразим через давление насыщенных паров p , переменную температуру поверхности замораживания T_0 , универсальную газовую постоянную R_T :

$$\rho'' = \frac{p}{T_0 R_T}. \quad (2)$$

Применим граничное условие на границе лёд - паровая полость для принятого распределения температур (1), а также выражение для плотности паров влаги ρ'' (2):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda \frac{(T_1 - T_0)}{\xi} = S^* (L + r) \frac{p}{T_0 R_T}. \quad (3)$$

В дальнейшем применим граничное условие на границе лёд - вода для принятого распределения температур (1):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\xi} = \lambda \frac{(T_1 - T_0)}{\xi} =$$

$$= L\rho_{\pi} \frac{a\xi}{2\tau}. \quad (4)$$

Разделим в уравнении (6) переменные и проинтегрируем в соответствующих пределах, после чего получим выражение, связывающее толщину слоя намораживания ξ с временем τ :

$$\lambda \frac{(T_1 - T_0)}{\xi} = \frac{\xi L\rho_{\pi}}{2\tau}. \quad (5)$$

Левые части выражений (3) и (5) равны, поэтому равны и их правые части:

$$S^*(L+r) \frac{p}{T_0} \frac{\mu}{R_{\Gamma}} = \frac{\xi L\rho_{\pi}}{2\tau}. \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) необходимо выразить с приемлемой точностью давление насыщенного пара над льдом p в интересующем диапазоне температур 0...12 °С:

$$p = AT_0 - B, \quad (7)$$

где $A=35$ Па/К, $B=8940$ Па — константы.

Подставим давление из выражения (7) в уравнение (6):

$$S^*(L+r) \frac{\mu}{T_0 R_{\Gamma}} (AT_0 - B) = \frac{\xi L\rho_{\pi}}{2\tau}. \quad (8)$$

Основное уравнение относительно толщины слоя намораживания ξ и времени τ получим, подставив соотношение для T_0 из уравнения (5) в уравнение (8):

$$\frac{S^*(L+r)\mu}{\left(T_1 - \frac{\xi^2 L\rho_{\pi}}{2\lambda\tau}\right) R_{\Gamma}} \left(A \left(T_1 - \frac{\xi^2 L\rho_{\pi}}{2\lambda\tau} \right) - B \right) = \frac{\xi L\rho_{\pi}}{2\tau}.$$

После упрощений оно примет окончательный вид:

$$\xi = \frac{2\tau S^*(L+r)\mu}{L\rho_{\pi} R_{\Gamma}} \left(A - \frac{B}{\left(T_1 - \frac{\xi^2 L\rho_{\pi}}{2\lambda\tau} \right)} \right). \quad (9)$$

Аналитическое решение уравнения (9) относительно толщины слоя намораживания ξ также получается посредством ре-

шения уравнения третьей степени относительно ξ (один корень - действительный, два - комплексно-сопряжённые). В общем виде решение довольно громоздко, поэтому следует переписать уравнение (9) в следующем виде:

$$\xi^3 + a\xi^2 - b\xi + c = 0, \quad (10)$$

где $a = \frac{2\tau S^* \mu (L+r) A}{L\rho_{\pi} R_{\Gamma}};$

$$b = \frac{2\lambda\tau T_1}{\rho_{\pi} L};$$

$$c = (AT_1 - B) \frac{2\tau^2 \lambda S^* \mu (L+r)}{(L\rho_{\pi})^2 R_{\Gamma}}.$$

Действительное решение уравнения (10) выглядит следующим образом:

$$\xi = -\frac{a}{3} + \frac{2\left(b + \frac{a^2}{3}\right)}{\sqrt{-36ba - 108c - 8a^3 + \sqrt{-12b^3 - 3b^2a^2 + 12\sqrt{+54bac + 81c^2 + 12ca^3}}}} + \frac{1}{6} \sqrt{-36ba - 108c - 8a^3 + \sqrt{-12b^3 - 3b^2a^2 + 12\sqrt{+54bac + 81c^2 + 12ca^3}}}. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) являются обобщёнными замкнутыми аналитическими решениями задачи о квазистационарном процессе вакуумного замораживания жидкости в спокойном состоянии относительно времени намораживания τ и толщины слоя намораживания ξ соответственно.

Преимущество точных аналитических решений перед существующими численными состоит в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами, а также о том, что ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

Заключение

В исследовании было получено обобщённое замкнутое аналитическое решение задачи о квазистационарном процессе вакуумного замораживания жидкости в спокойном состоянии, в то время как до этого имели место численные решения данной задачи.

Преимущество полученных аналитических решений задачи о квазистационар-

ном вакуумном замораживании влаги в мелкодисперсном состоянии перед существующими численными состоит в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами. Ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи вычислительной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маринюк, Б.Т. Теплообменные аппараты ТНТ. Конструктивные схемы и расчёт / Б.Т. Маринюк. - М.: Энергоатомиздат, 2009. - 200 с.
2. Маринюк, Б.Т. Вакуумно-испарительные холодильные установки, теплообменники и газификаторы техники низких температур / Б.Т. Маринюк. - М.: Энергоатомиздат, 2003. - 208 с.
3. Маринюк, Б.Т. Аппараты холодильных машин (теория и расчёт) / Б.Т. Маринюк. - М.: Энергоатомиздат, 1995. - 160 с.
4. Моделирование эксплуатационных процессов в технических системах / А.В.Абрамов, А.Ю.Албагачиев, С.М.Белобородов, С.А.Быков, В.П.Иванов, А.В.Киричек, И.Е.Лобанов, А.В.Морозова, М.В.Родичева; под ред. А.В.Киричека. - М.: Спектр, 2014. - 240 с.
5. Лобанов, И.Е. Точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на сферической поверхности (квазистационарная задача Стефана) / И.Е. Лобанов // Альманах современной науки и образования. - Тамбов: Грамота, 2011. - № 12 (55). - С. 50-53.
6. Лобанов, И.Е. Точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на внешней и внутренней сферической поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2012. - № 1. - С. 8-13.
7. Лобанов, И.Е. Обобщенная аналитическая теория квазистационарного намораживания на сферической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внутренней поверхности с граничными условиями I рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2012. - № 6. - С. 10-14.
8. Лобанов, И.Е. Обобщённая аналитическая теория квазистационарного намораживания на сферической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внешней поверхности с граничными условиями I рода на внутренней поверхности / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2012. - № 6. - С. 9-13.
9. Лобанов, И.Е. Обобщённая аналитическая теория квазистационарного намораживания на сферической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внутренней поверхности с граничными условиями III рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2012. - № 7. - Т. 1. - С. 9-14.
10. Лобанов, И.Е. Обобщённая аналитическая теория квазистационарного намораживания на сферической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внешней поверхности с граничными условиями III рода на внутренней поверхности / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2012. - № 7. - С. 10-15.
11. Лобанов, И.Е. Точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на внешней цилиндрической поверхности при нулевой криоскопической температуре и граничных условиях I рода на внутренней поверхности и III рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2012. - № 9. - С. 14-20.
12. Лобанов, И.Е. Теория квазистационарного намораживания на сферической поверхности применительно к аккумуляторам холода / И.Е. Лобанов, Б.Р. Айтিকেев // Проблемы усовершенствования холодильной техники и технологии: сб. науч. тр. V науч.-практ. конф. с международным участием / отв. ред. Б.С. Бабакин. - М.: Изд. комплекс МГУПП, 2012. — С. 111—117.
13. Лобанов, И.Е., Низовитин А.А. Аналитическая теория квазистационарного намораживания на плоской поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание с граничными условиями III рода на поверхности стенки и граничными условиями III рода на поверхности намораживания / И.Е. Лобанов, А.А. Низовитин // Отраслевые аспекты технических наук. - 2013. - № 5. - С. 9-14.
14. Лобанов, И.Е. Точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на внутренней цилиндрической поверхности при нулевой криоскопической температуре и граничных условиях I рода на внешней поверхности и III рода на внутренней

- поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2012. - № 10. - Т. 1. - С. 20-26.
15. Лобанов, И.Е. Аналитическая теория квазистационарного намораживания на цилиндрической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внутренней поверхности с граничными условиями I рода на внешней поверхности и III рода на внутренней поверхности / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2012. - № 12. - С. 8-15.
 16. Лобанов, И.Е. Обобщённая аналитическая теория квазистационарного намораживания на цилиндрической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внешней поверхности с граничными условиями I рода на внутренней поверхности и III рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2013. - № 2. - С. 14-21.
 17. Лобанов, И.Е. Аналитическая теория квазистационарного намораживания на цилиндрической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внешней поверхности с граничными условиями III рода на внутренней поверхности и III рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2013. - № 3. - С. 8-15.
 18. Лобанов, И.Е. Аналитическая теория квазистационарного намораживания на цилиндрической поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание на внутренней поверхности с граничными условиями III рода на внешней поверхности / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2013. - № 3. - С. 19-26.
 19. Лобанов, И.Е. Обобщённая численная теория квазистационарного одномерного намораживания на поверхности переменной кривизны (квазистационарная задача Стефана) / И.Е. Лобанов // Отраслевые аспекты технических наук. - 2013. - № 4. - С. 5-11.
 20. Лобанов, И.Е. Аналитическая теория квазистационарного намораживания на плоской поверхности (квазистационарная задача Стефана): намораживание с граничными условиями I рода на поверхности стенки и граничными условиями III рода на поверхности намораживания / И.Е. Лобанов // Московское научное обозрение. - 2013. - № 4. - С. 12-16.
1. Marinyuk, B.T. *Heat-Exchange Devices TNT. Design Circuits and Computation* / B.T. Marinyuk. - M.: EnergoAtom Publishing House, 2009. - pp. 200.
 2. Marinyuk, B.T. *Vacuum-Evaporator Refrigerating Plants, Heat Exchangers and Gasifiers of Low-Temperature Equipment* / B.T. Marinyuk. - M.: EnergoAtom Publishing House, 2003. - pp. 208.
 3. Marinyuk, B.T. *Devices of Freezing Equipment (Theory and Computation)* / B.T. Marinyuk. - M.: EnergoAtom Publishing House, 1995. - pp. 160.
 4. *Modeling of Operation Processes in Engineering Systems* / A.V. Abramov, A.Yu. Albagachiev, S.M. Beloborodov, S.A.Bykov, V.P. Ivanov, A.V. Kirichek, I.E. Lobanov, A.V. Morozova, M.V. Rodicheva; under the editorship of A.V. Kirichek. - M.: Spectrum, 2014. - pp. 240.
 5. Lobanov, I.E. Precise analytical solution of quasi-stationary problem of frosting upon spherical surface (Stephan quasi-stationary problem) / I.E. Lobanov // *Almanac of Modern Science and Education*. - Tambov: Gramota, 2011. - № 12 (55). - pp. 50-53.
 6. Lobanov, I.E. Precise analytical solution of quasi-stationary problem of frosting (Stephan problems) on external and internal spherical surface/ I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2012. - № 1. - pp. 8-13.
 7. Lobanov, I.E. Generalized analytical theory of quasi-stationary frosting on spherical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on internal surfaces with boundary conditions of the 1st type on external surface / I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2012. - № 6. - pp. 10-14.
 8. Lobanov, I.E. Generalized analytical theory of quasi-stationary frosting on spherical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on external surface with boundary conditions of the 1-st type on inner surface / I.E. Lobanov // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2012. - № 6. - pp. 9-13.
 9. Lobanov, I.E. Generalized analytical theory of quasi-stationary frosting on spherical surfaces (Stephan quasi-stationary problem): frosting on inner surface with boundary conditions of the III-d type on external surface / I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2012. - № 7. - Vol. 1. - pp. 9-14.
 10. Lobanov, I.E. Generalized analytical theory of quasi-stationary frosting on spherical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on external surface with boundary conditions of the III-d type on inner surface / I.E. Lobanov // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2012. - № 7. - pp. 10-15.
 11. Lobanov, I.E. Precise analytical solution of quasi-stationary problem of frosting (Stephan problems) on external cylindrical surface at zero cryoscopic temperature and boundary conditions of the I-st type on inner surface and the III-d type on external surface / I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2012. - № 9. - pp. 14-20.
 12. Lobanov, I.E. Theory of quasi-stationary frosting on spherical surface as applied to accumulators of cold / I.E. Lobanov, B.R. Aitikeyev // *Problems in Refrigeration Equipment and Techniques Updating: Proceedings of the V-th Scientific-Practical Conf. with Inter. Participation*/ executive editor B.S. Babakin. - M.: Publishing Complex of MSUPP, 2012. - pp. 111—117.
 13. Lobanov, I.E., Nizovitin A.A. Analytical theory of quasi-stationary frosting on flat surface (Stephan

- quasi-stationary problem): frosting with boundary conditions of the III-d type on wall surfaces and boundary conditions of the III-d type on surface of frosting / I.E. Lobanov, A.A. Nizovitin // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2013. - № 5. - pp. 9-14.
14. Lobanov, I.E. Precise analytical solution of quasi-stationary problem of frosting (Stephan problems) on inner cylindrical surface at zero cryoscopic temperature and boundary conditions of the I-st type on external surface and the III-d type on inner surface / I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2012. - № 10. - Vol. 1. - pp. 20-26.
15. Lobanov, I.E. Analytical theory of quasi-stationary frosting on cylindrical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on inner surface with boundary conditions of the I-st type on external surface and the III-d type on inner surface / I.E. Lobanov // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2012. - № 12. - pp. 8-15.
16. Lobanov, I.E. Generalized analytical theory of quasi-stationary frosting on cylindrical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on external surface with boundary conditions of the I-st type on inner surface and the III-d type on external surface / I.E. lobanov // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2013. - № 2. - pp. 14-21.
17. Lobanov, I.E. Analytical theory of quasi-stationary frosting on cylindrical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on external surface with boundary conditions of the III-d type on inner surface and the III-d type on external surface / I.E. Lobanov // *Branch Aspects of Engineering sciences*. - 2013. - № 3. - pp. 8-15.
18. Lobanov, I.E. Analytical theory of quasi-stationary frosting on cylindrical surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting on inner surface with boundary conditions of the III-d type on inner surface and the III-d type on external surface / I.E. Lobanov // *Moscow Scientific Review*. - 2013. - № 3. - pp. 19-26.
19. Lobanov, I.E. Generalized numerical theory of quasi-stationary one-dimensional (1D) frosting on surface with curvature variable (Stephan quasi-stationary problem) / I.E. Lobanov // *Branch Aspects of Engineering Sciences*. - 2013. - № 4. - pp. 5-11.
20. Lobanov, I.E. Analytical theory of quasi-stationary frosting on flat surface (Stephan quasi-stationary problem): frosting with boundary conditions of the I-st type on wall surface and boundary conditions of the III-d type on surface of frosting / I.E. Лобанов // *Moscow Scientific Review*. - 2013. - № 4. - pp. 12-16.

Статья поступила в редакцию 19.04.2016 г.

Рецензент: д.т.н., профессор МАИ

Мякочин А.С.

Сведения об авторах:

Лобанов Игорь Евгеньевич, д.т.н., вед. науч. сотрудник Московского авиационного института (национальный исследовательский технический университет), e-mail: lloobbaannooff@live.ru.

Lobanov Igor Evgenievich, D.Eng., Leading researcher of Moscow Aircraft Institute (national Research Technical University), e-mail: lloobbaannooff@live.ru.