

УДК 531/534
DOI: 10.12737/20247

Е.С. Цуканова

АНАЛИЗ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрен динамический расчет стержневых систем при ударной нагрузке с помощью метода конечных элементов. Для дискретизации систем использован динамический элемент, функции формы которого представляют собой точные колебательные формы элементов конструкции. Приведена оценка погрешностей расчета при использовании классиче-

ского конечного элемента с линейными функциями формы. Показана эффективность применения динамического элемента для расчета систем при ударной нагрузке.

Ключевые слова: метод конечных элементов, функции формы, динамический конечный элемент, стержневые системы, ударная нагрузка.

C.S. Tsukanova

ROD SYSTEMS ANALYSIS BY FINITE ELEMENT METHOD AT LOAD IMPACT WITH USE OF DYNAMIC ELEMENT

A dynamic computation for rod systems at load impact with the aid of the finite element method is considered. For the digitization of systems there was used a dynamic element, the form functions which are the exact oscillating forms of structure elements. An error estimate of the computation at the use of a classic finite element

with linear functions of a form is shown. The effectiveness of dynamic element application for the computation of systems at a load impact is presented.

Key words: finite element method, form functions, dynamic finite element, rod systems, load impact.

Конечный элемент, позволяющий получить точные значения собственных частот стержневых конструкций, подробно описан в работе [1], где для дискретизации стержневых систем используется специальный динамический конечный элемент (ДКЭ). Точность расчета достигается путем применения функций формы, являющихся точными колебательными формами элементов. Эффективность данного подхода показана на примерах динамического расчета некоторых конструкций. Также была решена задача вынужденных колебаний с гармонической возмущающей силой [2].

В данной работе решается динамическая задача при ударной нагрузке. Определены амплитудные значения перемещений точек приложения удара, а также их движения во времени. Для простейших систем полученные результаты полностью совпадают с результатами, полученными аналитическим путем. Анализ динамики систем был также проведен с использованием конечного

элемента с функциями формы в виде полиномов Эрмита, была определена погрешность его применения по сравнению с динамическим элементом.

Ударная нагрузка представляет собой кратковременно приложенную силу в начальный момент времени. Предположим на данном этапе, что сила удара описывается синусоидой с частотой, например, в 10 раз выше первой собственной частоты k_1 конструкции:

$$P(t) = \begin{cases} \sin(10k_1 t), & 0 \leq t < \frac{\pi}{10k_1}; \\ 0, & t > \frac{\pi}{10k_1}. \end{cases} \quad (1)$$

Перемещения стержня определяются с помощью интеграла Дюамеля:

$$U(x, t) = \int_0^t \dot{P}(\tau) R_1(x, t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $R_1(x, t)$ – реакция системы на внезапно приложенную единичную нагрузку.

Определение реакции системы на единичную нагрузку аналогично решению задачи о вынужденных колебаниях. В частности, конфигурации консольного стержня (рис. 1) определяются по формулам:

$$u_0(x) = \frac{P_1(0)x}{EF} \text{ - при растяжении;}$$

$$u_0(x) = \frac{P_1(0)lx^2}{3EI} \text{ - при изгибе.}$$

Задача определения реакции на единичную нагрузку приводится к задаче определения движения системы по начальным условиям. В качестве начальных (3) вий принимаются конфигурация стержня при

$$\int_0^l u_0(x)U_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \varphi_n \int_0^l U_m(x)U_n(x)dx = A_m \sin \varphi_m \int_0^l [U_m(x)]^2 dx;$$

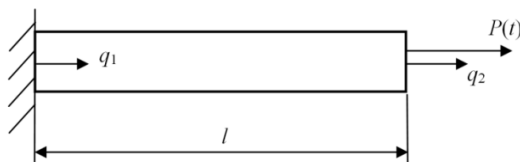
$$\int_0^l v_0(x)U_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \cos \varphi_n \int_0^l U_m(x)U_n(x)dx = k_m A_m \cos \varphi_m \int_0^l [U_m(x)]^2 dx.$$

В случае одностержневой конструкции амплитуда точки приложения силы вычисляется следующим образом:

$$A_m = \frac{\int_0^l u_0(x)U_m(x)dx}{\int_0^l U_m^2(x)dx}, \quad (4)$$

где $U_m(x)$ – собственные формы колебаний стержня.

Окончательно реакция стержня на единичный скачок записывается следующим образом:



а)

действию единичной силы и нулевое распределение скоростей:

$$u_0 = u_0(x), \quad v_0(x) = 0$$

В общем виде движение стержня определяется по формуле

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)A_n \sin(k_n t + \varphi_n),$$

где $U_n(x)$ – собственные формы колебаний стержня.

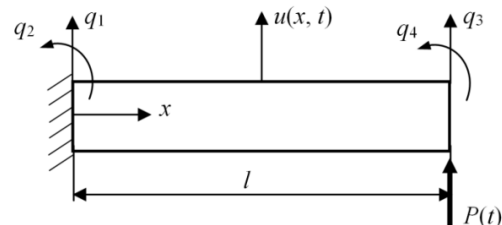
Скорость движения точек стержня:

$$\frac{du}{dt} = v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)A_n k_n \cos(k_n t + \varphi_n).$$

Воспользуемся свойством ортогональности собственных форм:

$$R_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x) \sin(k_n t). \quad (5)$$

В качестве простейшей динамической системы, для которой получено аналитическое решение, совпадающее с решением по методу ДКЭ, рассматривается консольный стержень, работающий на растяжение (рис. 1а) и изгиб (рис. 1б).



б)

Рис. 1. Расчетные схемы стержней: а - работающего на растяжение; б – изгибаемого

В табл. 1 и 2 представлено сравнение результатов динамического расчета работающего на растяжение и изгибаемого стержней при начальных условиях (3), по-

лученных различными методами: аналитическим, с использованием динамического конечного элемента, с использованием классического элемента при разном числе

разбиений стержня. Для классического элемента показана относительная погрешность расчета (в %). Перемещения точки представлены в виде отношения двух амплитуд

$A_{уд}/A_{ст}$, где $A_{уд}$ – амплитудное перемещение при начальных условиях (3), $A_{ст}$ – перемещение точки под действием статической единичной силы.

Таблица 1

Амплитудные перемещения стержня, работающего на растяжение, в точке приложения силы

Параметр	№ частоты	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	0,811	1,000 (+23,31%)	0,854 (+5,30%)	0,821 (+1,23%)	0,812 (+0,12%)
	2	0,090	-	0,146 (+62,22%)	0,101 (+12,22%)	0,092 (+2,22%)
	3	0,032	-	-	0,045 (+40,63%)	0,034 (+6,25%)
	4	0,017	-	-	0,032 (+88,24%)	0,018 (+5,88%)

Из табл. 1 видно, что в случае растяжения при небольшом числе разбиений наблюдается значительная погрешность. Это можно объяснить тем, что при малом числе разбиений классический конечный элемент плохо аппроксимирует форму колебаний стержня. Как следует из зависимости (4), форма колебаний является определяющим фактором при расчете амплитуды системы с заданными начальными условиями (3).

Реакции на единичный скачок стержня, работающего на растяжение и сжатие, при разном числе элементов показаны на рис. 2.

Движение точки приложения удара во времени определяется по зависимости (2) и для стержня, работающего на растяжение-сжатие, имеет вид, представленный на рис. 3.

Рис. 3 показывает движение стержня при частоте ударной нагрузки $k_{уд}$, превышающей первую собственную частоту стержня в 10 раз. При увеличении частоты ударной нагрузки характер движения сохраняется, однако происходит уменьшение амплитуды. На рис. 4 показано движение стержня, работающего на растяжение, при частоте удара, превышающей первую собственную в 10, 20, 50 и 100 раз.

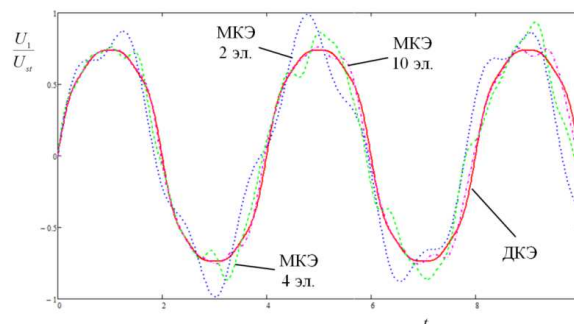


Рис. 2. Реакции на единичный скачок стержня, работающего на растяжение

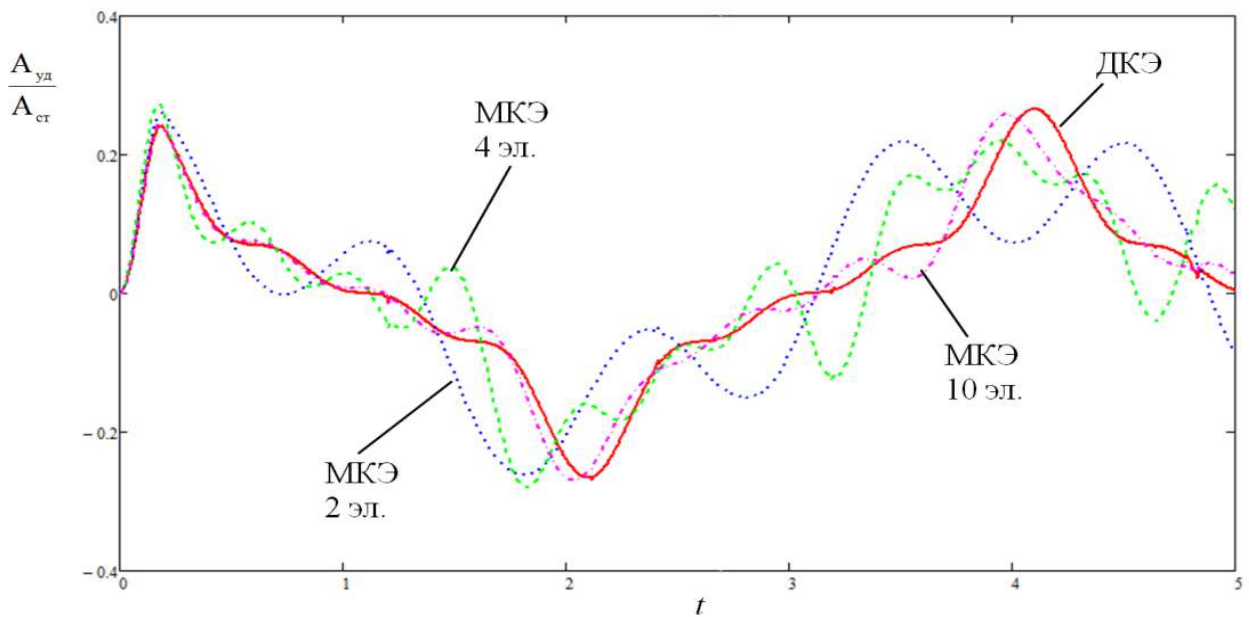


Рис. 3. Движение стержня, работающего на растяжение и сжатие

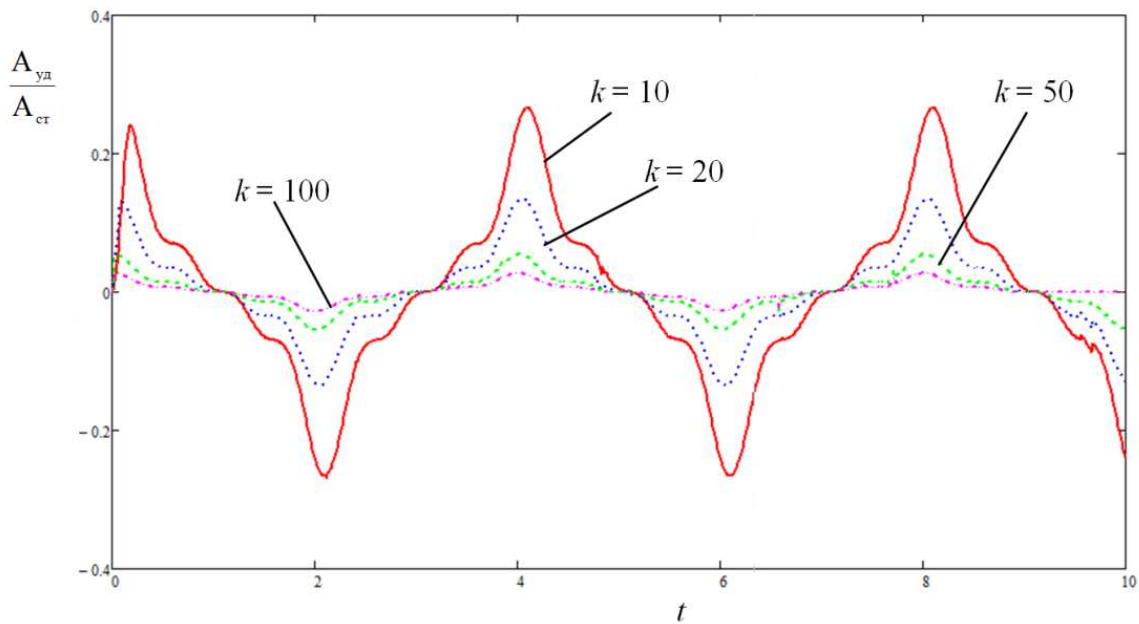


Рис. 4. Движение стержня, работающего на растяжение, при разной частоте удара

Амплитудные перемещения изгибаемого стержня в точке приложения силы приведены в табл. 2.

Таблица 2

Амплитудные перемещения изгибаемого стержня в точке приложения силы

Параметр	№ частоты	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	2,161	2,162 (+0,05%)	2,162 (+0,05%)	2,161 (+0,00%)	2,161 (+0,00%)
	2	1,760	2,162 (+22,84%)	1,743 (-0,97%)	1,747 (-0,74%)	1,754 (-0,34%)
	3	1,025	-	1,124 (+10,74)	0,982 (-3,25%)	1,001 (-1,38%)
	4	0,728	-	0,605 (-16,90%)	0,702 (-3,57%)	0,708 (-2,75%)

Из табл. 2 видно, что при изгибе получаются меньшие погрешности, чем при растяжении. Это можно объяснить тем, что в случае изгиба функции формы классического элемента лучше аппроксимируют истинные колебательные формы стержня (высокая точность аппроксимации достигается на первых двух частотах).

Ниже показаны реакции на единичный скачок изгибаемого стержня в точке приложения силы (рис. 5) и суммарное движение системы (рис. 6), полученные на основе зависимостей (5) и (2) соответственно.

Таким образом, на основе полученных реакций на единичный скачок можно вы-

числить перемещения стержня при действии ударной нагрузки (1). Перемещения стержня в таком случае определяются с помощью интеграла Дюамеля по зависимости (2).

При увеличении частоты ударной нагрузки, как и в случае растяжения, сохраняется характер движения и уменьшается его амплитуда (рис. 7).

Таким образом, как и в предыдущих работах, на примере простейших стержневых систем показана эффективность применения динамического конечного элемента для анализа конструкций.

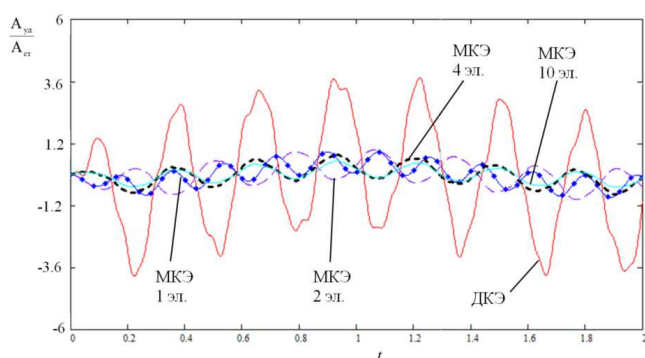


Рис. 5. Реакции на единичный скачок стержня, работающего на изгиб

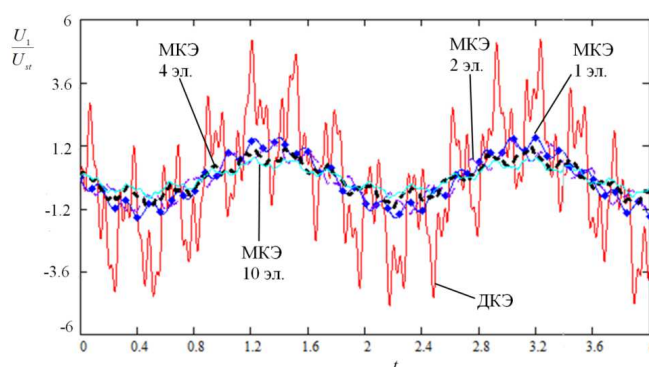


Рис. 6. Движение стержня, работающего на изгиб

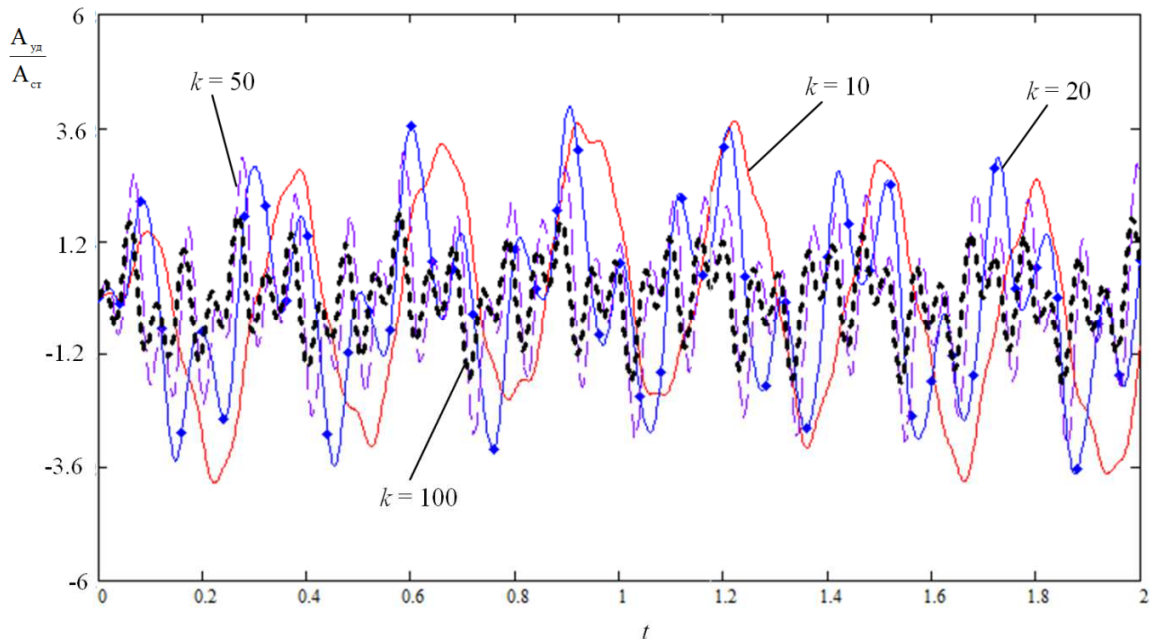


Рис. 7. Движение стержня, работающего на изгиб, при разной частоте удара

Динамический конечный элемент позволяет проводить точный расчет более сложных конструкций, когда аналитическое решение получить затруднительно. В случае стержневых систем амплитуда точки приложения ударной нагрузки имеет следующий вид:

$$A_m = \frac{\sum_{i=1}^n \int_0^L u_0(x) U_n(x) dx}{\sum_{i=1}^n \int_0^L U_n^2(x) dx}, \quad (6)$$

где n – число стержней.

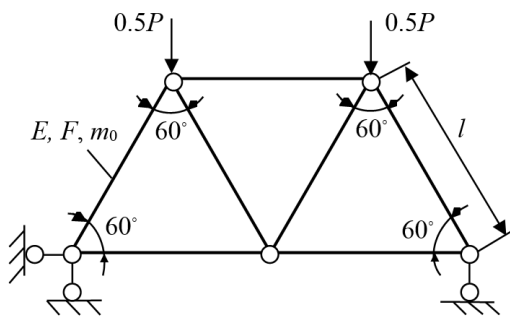


Рис. 8. Расчетная схема плоской фермы

В качестве сложной стержневой системы для случая растяжения по аналогии с

предыдущими работами рассмотрим плоскую ферму, представленную на рис. 8.

Стержни фермы идентичны по геометрии и свойствам материала. К ферме приложен единичный импульс, который распределяется пополам между узлами верхнего горизонтального стержня.

В табл. 3 представлено сравнение результатов расчета амплитуд точек приложения ударной нагрузки (по вертикали). Амплитуды точек приложения нагрузки получаются одинаковыми ввиду симметричности фермы. Расчет выполнен с применением динамического конечного элемента и классического элемента с линейными функциями формы. Для классического элемента показана относительная погрешность расчета (в %). Перемещения точки представлены в виде отношения двух амплитуд $A_{уд}/A_{ст}$, где $A_{уд}$ – амплитудное перемещение при ударе, $A_{ст}$ – перемещение точки под действием статической единичной силы.

Таблица 3

Перемещения точки приложения удара плоской фермы

Параметр	№ частоты	ДКЭ	МКЭ (1 элемент)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	0,170	0,142 (-16,47%)
	2	0,114	0,122 (+7,10%)
	3	0,110	0,118 (+7,27%)
	4	0,200	0,244 (+22,00%)
	5	0,079	0,186 (+135,44%)

Из табл. 3 видно, что при увеличении частоты растёт погрешность расчета при использовании классического конечного элемента с линейными функциями формы.

На рис. 9 приведена реакция фермы на единственный скачок в точках приложения на-

грузки, полученная на основе выражений (5) и (6).

Перемещения фермы от ударной нагрузки (1) после интегрирования согласно (2) имеют вид, показанный на рис. 10.

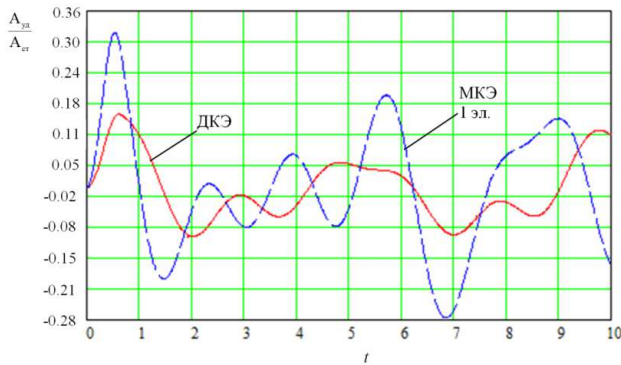


Рис. 9. Реакция фермы на единственный скачок в точках приложения нагрузки

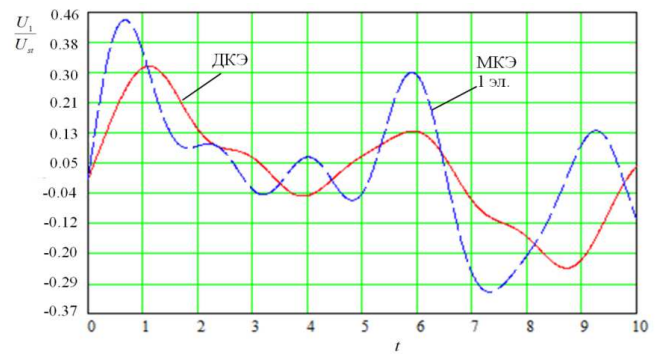


Рис. 10. Перемещения фермы в точках приложения ударной нагрузки

При увеличении частоты ударной нагрузки уменьшается амплитуда колебаний (рис. 11).

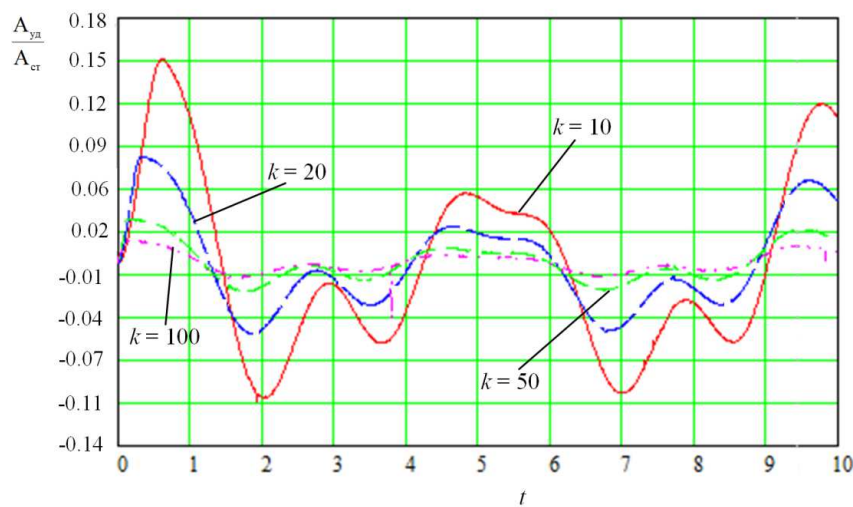


Рис. 11. Перемещения фермы при разной частоте ударной нагрузки

Для случая изгиба по аналогии с предыдущими работами рассмотрим стержневую систему в виде Г-образной рамы (рис. 12).

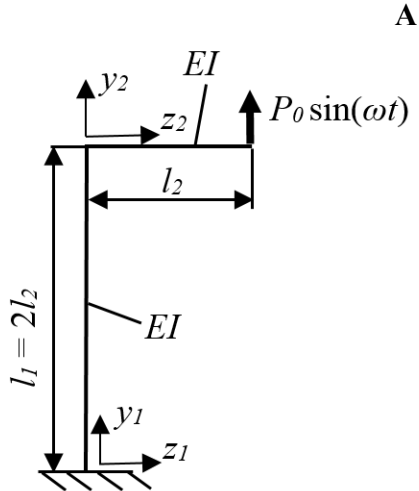


Рис. 12. Расчетная схема Г-образной рамы

В табл. 4 приведены результаты расчета амплитуд точки приложения удара горизонтального стержня при использовании динамического конечного элемента и классического элемента с линейными функциями формы. Для классического элемента показана погрешность расчета (в %) относительно ДКЭ. Перемещения точки представлены в виде отношения двух амплитуд $A_{уд}/A_{ст}$, где $A_{уд}$ – амплитудное перемещение при ударе, $A_{ст}$ – перемещение точки приложения нагрузки под действием статической единичной силы.

Из табл. 4 видно, что при малом числе элементов погрешность расчета при использовании классического конечного элемента высока.

На рис. 13 приведены реакции на единичный скачок точки приложения нагрузки рамы при использовании ДКЭ и классического КЭ при разном числе разбиений стержней.

Таблица 4

Амплитуды точки приложения удара Г-образной рамы

Параметр	№ частоты	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (3 элемента)
$A_{уд}/A_{ст}$	1	11,576	10,902 (-5,82%)	10,524 (-9,09%)	11,914 (+2,92%)
	2	13,703	9,433 (-31,16%)	14,458 (+5,51%)	14,845 (+8,34%)
	3	13,155	17,120 (+30,14%)	13,267 (+0,85%)	18,889 (+43,59%)
	4	27,778	67,847 (+144,25%)	27,816 (+0,14%)	23,420 (-15,69%)

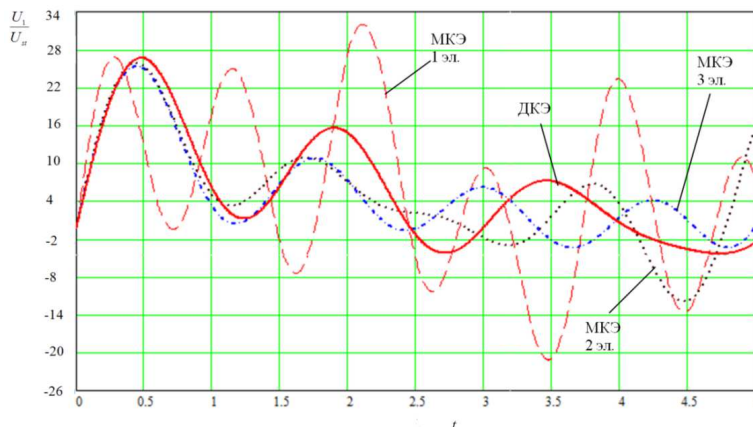


Рис. 13. Реакции на единичный скачок точки А рамы

На рис. 14 показаны перемещения рамы в точке приложения удара (1), а на рис.

15 – те же перемещения, но при разной продолжительности действия нагрузки.

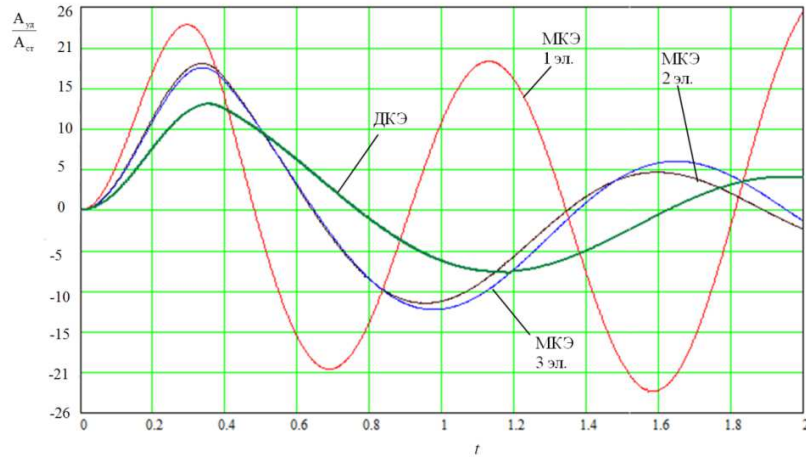


Рис. 14. Перемещения рамы в точке приложения ударной нагрузки

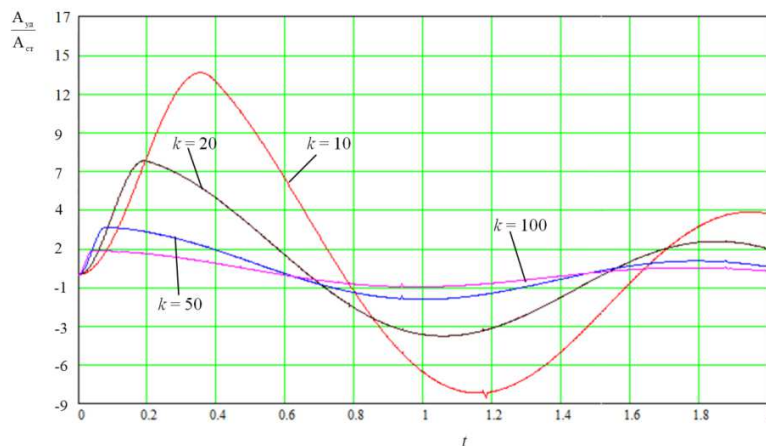


Рис. 15. Перемещения точки А рамы при разной продолжительности удара

При дальнейшем увеличении числа разбиений кривые, полученные с применением классического элемента, приближаются к кривой, полученной с использованием динамического элемента.

В работе [1] показано, что использование точных решений уравнений колебаний стержней в качестве базисных функций для построения конечного элемента позволяет точно оценить собственные частоты систем. Данный подход также эффективен при вынужденных колебаниях стержневых систем при гармоническом возмущении и при

оценке динамического напряженно-деформированного состояния конструкций [2].

В настоящей работе показана значительная эффективность применения динамического конечного элемента для анализа динамики стержневых конструкций при ударной нагрузке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цуканова, Е.С. Динамический конечный элемент / Е.С. Цуканова, Б.Г.Кеглин // Вестник Брянского государственного технического университета.- 2013.– №3(39). – С. 69 – 78.
2. Цуканова, Е.С. Расчет вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента / Е.С. Цуканова// Вестник Брянского государственного технического университета.- 2015.– №2(46). – С. 93 – 103.
1. Tsukanova, E.S. Dynamic finite element / E.S. Tsukanova, B.G. Keglın // Bulletin of Bryansk State Technical University.- 2013.– №3(39). – pp. 69 – 78.
2. Tsukanova, E.S. Computation of forced oscillations in rod systems by finite element method using dynamic finite element / E.S. Tsukanova// Bulletin of Bryansk State Technical University.- 2015.– №2(46). – pp. 93 – 103.

Статья поступила в редколлегию 6.10.2015.

*Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного технического университета
Мирошников В.В.*

Сведения об авторах:

Цуканова Екатерина Сергеевна, аспирант кафедры «Механика, динамика и прочность машин» Брянского государственного технического университета, тел.: (4832) 56-08-10, e-mail: ex-xgerm@yandex.ru.

Tsukanova Catherine Sergeevna, post graduate student of the Dep. “Mechanics, Dynamics & Machine Strength” Bryansk State Technical University, Phone: (4832) 56-08-10, e-mail: ex-xgerm@yandex.ru.

