УДК 517.956.35

И.А. Рудаков

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ И СВОБОДНЫМ КОНЦАМИ[1]

Доказано существование счетного числа периодических по времени решений квазилинейного уравнения колебаний струны с однородными граничными условиями Дирихле и Неймана на отрезке с непостоянными коэффициентами в случае, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост.

Ключевые слова: волновое уравнение, периодические решения, задача Штурма-Лиувилля, критические точки функционала.

Исследуется задача о периодических решениях волнового уравнения

$$p(x)u_{tt}-(p(x)u_x)_x+g(x,t,u)=0,\quad 0<x<\pi,\quad t\in R; \tag{1}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t)\ ,0<x<\pi,\quad t\in R; \tag{2}$$

$$u(0,t)=u'(\pi,t)=0,\quad t\in R. \tag{3}$$

Уравнение (1) является также нелинейной моделью распространения волн в неизотропной среде [1].

Функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(x)\in C^2[0,\pi],\quad p(x)>0\qquad \forall x\in[0,\pi]. \tag{4}$$

Обозначим $\Omega=[0,\pi]\times R\setminus(T\,Z)$, $\eta_p(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{p''}{p}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p'}{p}\right)^2$, $Z_+=N\bigcup\{0\}$.

Задача о периодических решениях квазилинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами исследовалась в большом количестве работ [2-7]. В работах [1; 8-12] было доказано существование периодических по времени решений для волнового уравнения с переменными коэффициентами в случае, когда функция $\eta_p(x)$ сохраняет постоянный знак ($\eta_p(x)>0\ \forall x\in[0,\pi]$ в [1; 8-10], $\eta_p(x)<0\ \forall x\in[0,\pi]$ в [11]). Целью данной работы является доказательство теоремы о существовании периодических по времени решений для волнового уравнения (1) с граничными условиями (3) в случае, когда функция $\eta_p(x)$ может изменять знак на отрезке $[0,\pi]$.

Свойства линейной части уравнения. Решение задачи (1)-(3) будем искать как сумму ряда Фурье. Для построения соответствующей ортонормированной системы исследуем задачу Штурма-Лиувилля:

$$-(p(x)\varphi'(x))'=\lambda\, p(x)\varphi(x); \tag{5}$$

$$\varphi(0)=\varphi'(\pi)=0. \tag{6}$$

Для $r\geq 1$ будем рассматривать пространство $L_r(\Omega)$, являющееся замыканием $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_r=\left(\int\limits_\Omega |u(x,t)|^r\ p(x)\,dx\,dt\right)^{1/r}$. Обозначим $\|u\|=\|u\|_2$. Для функций

---

[1] Статья написана при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.2640.2014.

$$u \in L_{r_1}(\Omega),\ v \in L_{r_2}(\Omega),\ r_1, r_2 \geq 0,\ 1/r_1 + 1/r_2 = 1,$$

обозначим $(u,v) = \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, v(x,t)\, p(x)\, dxdt,\quad u,v \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим также пространство $L_r(0,\pi)$, скалярное произведение в котором задается равенством

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{[0,\pi]} \varphi(x)\, \psi(x)\, p(x)\, dx, \quad \varphi,\psi \in L_2(0,\pi).$$

Из (5),(6) следует соотношение

$$\lambda \int\limits_0^{\pi} \varphi^2(x)\, p(x)\, dx = \int\limits_0^{\pi} (\varphi'(x))^2\, p(x)\, dx\ . \tag{7}$$

Поэтому задача (5),(6) имеет положительные простые [13] собственные значения $\lambda = \lambda_n^2,\ n \in N\ (\lambda_n > 0)$, которым соответствуют собственные функции $\varphi_n(x)$. Будем считать, что функции $\varphi_n(x)$ нормированы в $L_2(0,\pi)$. Согласно теореме В.А.Стеклова, система функций $\varphi_n(x)$ является полной ортонормированной в $L_2(0,\pi)$. Заметим, что из (5),(6),(7) следует, что система функций

$$\left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{\lambda_n} \right\} \tag{8}$$

также является ортонормированной в $L_2(0,\pi)$.

В [13] для задачи Штурма-Лиувилля (5),(6) доказано следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \frac{B}{2\pi}\frac{1}{n} + \beta_n, \tag{9}$$

где $B = \int\limits_0^{\pi} \eta_p(x)\, d\, x - \dfrac{p'(\pi)}{p(\pi)}\ , \beta_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right),\ n \in N$.

Пусть $H_1(\Omega)$ есть пространство Соболева, полученное замыканием пространства $C^{\infty}(\Omega)$ по норме $\|u\|_1 = \left(\int\limits_{\Omega} (u^2 + u_x^2 + u_t^2)\, p(x)\, dx\, dt \right)^{1/2}$. Система функций

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right\}_{m,n \in N}$$

является полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой. Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций из системы Λ. Определим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, для которого $D(A_0) = D$ и $A_0\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Пусть $\overline{A}_0\, \varphi = \dfrac{1}{p} A_0 \varphi \quad \forall \varphi \in D(A_0)$.

Обозначим $A = (\overline{A}_0)^*$ в $L_2(\Omega)$. Функции из системы Λ являются собственными функциями операторов $\overline{A}_0$ и A с собственными значениями $\mu_{nm}=\lambda_n^2-\left(\frac{a}{b}m\right)^2$, $n\in N,\ m\in Z_+$, которые соответствуют собственным функциям

$$T_m\varphi_n(x)\cos\frac{a}{b}mt,\ n\in N, m\in Z_+,\ T_m\varphi_n(x)\ \sin\frac{a}{b}mt,\ n,m\in N.$$

Здесь $T_m=\begin{cases}1/\sqrt{T}, & m=0;\\ \sqrt{2}/\sqrt{T}, & m\in N.\end{cases}$

Для оператора A справедливы следующие свойства [1]: 1) A самосопряжен в $L_2(\Omega)$; 2) $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$; 3) $L_2(\Omega)=Ker(A)\oplus R(A)$.

Будем искать периодические решения, для которых период времени имеет вид

$$T=2\pi\frac{b}{a},\quad a,b\in N,\ НОД\,(a,b)=1. \tag{10}$$

Функция

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_m\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt+b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right) \tag{11}$$

принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{nm}^2(x)\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)$. При этом $Au=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{nm}T_m\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt+b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right)$.

Обозначим $\sigma(A)=\{\mu_{nm}\,|\,n\in N,\ m\in Z_+\}$. Из (9) следует, что $\mu_{nm}=0$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$2am-(2n-1)b=\frac{Bb}{\pi n}+2b\beta_n. \tag{12}$$

Если $B\neq 0$, то при достаточно больших n правая часть уравнения (12) принадлежит интервалу (-1,1) и не равна 0. Поэтому при $B\neq 0$ уравнение (12) имеет не более чем конечное число пар решений (n,m). Следовательно, в этом случае пространство $KerA$ конечномерно.

Из (9) вытекает следующее представление для μ_{nm}:

$$\mu_{nm}=\frac{1}{4b^2}((2n-1)b-2am)((2n-1)b+2am)+\frac{B}{\pi}+\overline{\beta}_n, \tag{13}$$

где $\overline{\beta}_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Если b четное число (тогда a является нечетным числом), то уравнение

$$(2n-1)b-2am=0 \tag{14}$$

имеет решения $n=ar-\dfrac{a-1}{2}, m=\dfrac{b}{2}(2r-1),\ r\in N$ и справедливо равенство

$$\lim_{r\to\infty}\mu_{(ar-a_1)(b(2r-1)/2)}=\frac{B}{\pi}, \tag{15}$$

где $a_1=\dfrac{a-1}{2}$. Таким образом, при четном b множество $\sigma(A)$ имеет единственную предельную точку $\dfrac{B}{\pi}$. При нечетном b уравнение (14) не имеет целочисленных решений и $\sigma(A)$ есть дискретное неограниченное множество без конечных предельных точек.

Легко видеть, что в случае нечетного b существует положительная константа C_0, такая, что если $\mu_{nm}\neq 0$, то

$$|\mu_{nm}|\geq C_0(n+m). \tag{16}$$

Квазилинейное уравнение. Предположим, что существуют положительные константы A_1, A_2, A_3, A_4, r, такие, что при всех $(x,t,u)\in\Omega\times R$ выполнено неравенство

$$A_3|u|^{r-1}-A_4\leq\left|g(x,t,u)\right|\leq A_1|u|^{r-1}+A_2, \tag{17}$$

где

$$r>2, \quad \frac{A_3}{2}>\frac{A_1}{r}. \tag{18}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u\in L_r(\Omega)$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega}u(p\varphi_{tt}-(p\varphi_x)_x)\,dx\,dt+\int\limits_{\Omega}g(x,t,u)\,\varphi\,dx\,dt=0 \quad \forall\varphi\in D.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (4),(10), функция g непрерывна на $\Omega\times R$, T-периодична по t, удовлетворяет требованиям (17), (18) и либо функция g не зависит от t, либо $g(x,t,-u)=-g(x,t,u)$ при всех $(x,t)\in\Omega$, $u\in R$. Предположим также, что либо $B>0$ и функция g не убывает по u при всех $(x,t)\in\Omega$, либо $B<0$ и функция g не возрастает по u при всех $(x,t)\in\Omega$. Тогда $\forall\ d>0$ существует обобщенное решение $u\in L_r(\Omega)$ задачи (1)-(3), такое, что $\|u\|_r\geq d$. При нечетном b для обобщенного решения u задачи (1)-(3) справедливо включение $u\in H_1(\Omega)\bigcap C(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $B>0$ (случай $B<0$ аналогичен). Обозначим $a_0=\dfrac{B}{2\pi}$, $b_0=\dfrac{3B}{2\pi}$. Из (15) вытекает существование $r_0\in N$, такого, что при всех $r\geq r_0$ справедливо включение $\mu_{(ar-a_1)(b(2r-1)/2)}\in[a_0,b_0]$. При четном b обозначим

$$M=\left\{(n,m)\in N\times Z_+\ \middle|\ \mu_{nm}\neq 0,\ b(2n-1)\neq 2am\ \right\}\bigcup$$

$$\bigcup\left\{(n,m)\,|\,n=ar-\frac{a-1}{2},\ m=\frac{b}{2}(2r-1),\ \ r\in N, r<r_0, \mu_{nm}\neq 0\right\},$$

$$L=\left\{(n,m)\,|\,n=ar-\frac{a-1}{2}, m=\frac{b}{2}(2r-1), r\in N, r\geq r_0\right\}.$$

При нечетном b обозначим $M=\{(n,m)\in N\times Z_+ \mid \mu_{nm}\neq 0\}$. Рассмотрим конечномерные подпространства $E_n=N_1\oplus N_{2n}\oplus N_{3n}$, где $2n>n_0$, $N_1=Ker\,A$, N_{2n}, N_{3n} есть линейные оболочки множеств

$$\left\{\varphi_k(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right),\ \varphi_k(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\Big|\ (k,m)\in L;\ k\leq n;\ m\leq n\right\},$$

$$\left\{\varphi_k(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right),\ \varphi_k(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\Big|\ (k,m)\in M;\ k\leq n;\ m\leq n\right\}.$$

соответственно $(n\in N)$. При нечетном b будем считать $N_{2n}=\{0\}$.

Рассмотрим на E_n функционал

$$F(u)=\frac{1}{2}(Au,u)+\int_\Omega G(x,t,u)\,dx\,dt,\ u\in E_n,\quad \text{где}\quad G(x,t,u)=\int_0^u g(x,t,s)\,ds.$$

Доказательство теоремы будет состоять из двух этапов: I. Доказательство существования критической точки F на E_n. II. Предельный переход.

I. Существование критической точки F на E_n докажем, опираясь на метод Е.Файрайсла [14].

Для любого $c\in R$ обозначим G_c и L_c подпространства E_n, являющиеся линейными оболочками тех собственных функций оператора A, собственные значения которых больше и не больше числа c соответственно.

Из (17)-(18) следует существование положительной константы A_5, такой, что при всех $(x,t,u)\in[0,\pi]\times R^2$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{p}A_3|u|^p-A_5|u|\leq G(x,t,u)\leq\frac{1}{p}A_1|u|^r+A_2|u|. \tag{19}$$

Для любого $c\in R$ и любого $u\in G_c$ имеем

$$F(u)\geq\frac{1}{2}c\,\|u\|^2+\frac{A_3}{p}\|u\|_p^p-A_5\|u\|_1\geq A_6\|u\|^p-\frac{1}{2}|c|\cdot\|u\|^2-A_7\|u\|.$$

Здесь A_6, A_7 не зависят от c и n. Обозначим $m(c)=\min\limits_{[0,+\infty)}h(\tau)-1$, где $h(\tau)=A_6\tau^r-\frac{1}{2}|c|\,\tau^2-A_7\tau$. Тогда

$$F(u)>m(c)\quad \forall u\in G_c. \tag{20}$$

Для любой функции $u\in L_1(\Omega)$ будем обозначать через a_{mk}, b_{mk} коэффициенты Фурье:

$$a_{mk}=\frac{2}{T}\left(u,\varphi_m(x)\cos\left(\frac{a}{b}kt\right)\right),\ b_{mk}=\frac{2}{T}\left(u,\varphi_m(x)\sin\left(\frac{a}{b}kt\right)\right),$$

$$a_{m0}=\frac{1}{T}(u,\varphi_m(x)),\ b_{m0}=0,\ m,k\in N. \tag{21}$$

Возьмем $u \in E_n$. Обозначим $\quad |||u|||_s = \sum_{(n,m)\in N\times Z_+} |\mu_{nm}|^s \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right).$

Стандартно доказывается сходимость ряда $\sum_{\mu_{mk}\in M} \frac{1}{|\mu_{mk}|^r}$, если $r > 1$.

Лемма 1. Существует $\beta \in (0,1)$, такое, что

$$\|u\|_p \le C_1 |||u|||_\beta \quad \forall u \in H_{3n} \tag{22}$$

и C_1 не зависит от n и u.

Доказательство. Пусть $p' = \frac{p}{p-1}, \gamma = \frac{2}{p'}, \gamma' = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \ \alpha \in \left(\frac{p-2}{2(p-1)}, \frac{p}{2(p-1)}\right)$. Обозначим a_{mk}, b_{mk} коэффициенты Фурье функции u, вычисленные по формулам (21). Используя неравенства Хаусдорфа-Юнга и Гельдера, выведем

$$\|u\|_p \le C_2 \left[\sum_{(m,k)\in M} (|a_{mk}|^{p'} + |b_{mk}|^{p'})\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= C_2 \left[\sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}|^{-\alpha} \ (|\mu_{mk}|^{\alpha} |a_{mk}|^{p'} + |\mu_{mk}|^{\alpha} |b_{mk}|^{p'})\right]^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le C_2 \left[\sum_{(m,k)\in M} \frac{1}{|\mu_{mk}|^{\alpha\gamma'}}\right]^{\frac{1}{\gamma' p'}} \left[\sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}|^{\alpha\gamma} \ (|a_{mk}|^{\gamma p'} + |b_{mk}|^{\gamma p'})\right]^{\frac{1}{\gamma p'}} =$$

$$= C_2 \left[\sum_{(m,k)\in M} \frac{1}{|\mu_{mk}|^{\alpha\gamma'}}\right]^{\frac{1}{\gamma' p'}} \left[\sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}|^{\frac{2(p-1)\alpha}{p}} \ (|a_{mk}|^2 + |b_{mk}|^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим $\beta = 2\alpha \frac{p-1}{p}, \quad a = \alpha\gamma' = \frac{2(p-1)\alpha}{p} \in (1, +\infty)$. Тогда $\beta \in (0,1)$ и выполнено неравенство (22) с константой $C_1 = C_2 \left[\sum_{(m,k)\in M} \frac{1}{|\mu_{mk}|^{\alpha\gamma'}}\right]^{\frac{1}{\gamma' p'}}$. Лемма доказана.

Обозначим $S_n = \left\{ u \in E_n \,\middle|\, |||u|||_\beta = 1 \right\}.$

Лемма 2. Для любого $d \in R$ существует число $w(d) < 0$, такое, что для любого $u \in \{v \in L_{w(d)} \,|\, |||v|||_\beta = 1\}$ выполняется неравенство $F(u) \le d$.

Доказательство. Пусть $w < 0$. Заметим, что на N_{2n} собственные значения A положительные. Поэтому $L_\omega \subseteq N_{3n}$. Пусть $u \in L_\omega$ такое, что $|||u|||_\beta = 1$, и пусть a_{mk}, b_{mk} есть коэффициенты Фурье функции u, вычисленные по формулам (21). Тогда

$$F(u) \le -\frac{1}{2} \sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}| \left(a_{mk}^2 + b_{mk}^2\right) + \frac{A_1}{p} \|u\|_p^p + A_2 \|u\|_1 \le$$

$$\le -\frac{1}{2} |\omega|^{1-\beta} \sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}|^\beta \left(a_{mk}^2 + b_{mk}^2\right) + \frac{A_1}{p} C_1^p + A_2 C_2 \le$$

$$= -\frac{1}{2} |\omega|^{1-\beta} + \frac{A_1}{p} C_1^p + A_2 C_2,$$

где C_2 не зависит от n и u. Если взять достаточно малое $\omega=\omega(d)<0$, то утверждение леммы будет доказано. Лемма доказана.

Возьмем произвольное $c<0$. Выберем такое число $c_1<\omega(c)$, что $L_{c_1}\subset L_{\omega(c)}$ $\left(L_{c_1}\neq L_{\omega(c)}\right)$, где значение $\omega(c)$ определено в лемме 2. Обозначим $\gamma(c)=\min\left(m(c_1),c-1\right)$. Докажем, что существует критическая точка $u_n\in E_n$ функционала F на E_n, такая, что

$$F(u_n)\in\left[\gamma(c),c\right]. \qquad (23)$$

Предположим противное. Тогда стандартно [14] доказывается существование непрерывного отображения $h:E_n\to E_n$, такого, что

$$h\left(\{u\mid F(u)\le c\}\right)\subseteq\{u\mid F(u)\le\gamma(c)\}. \qquad (24)$$

Кроме того, h является нечетным отображением, если g нечетно относительно u, или

$$h(u(\cdot,t+\tau))=h(u)(\cdot,t+\tau)\qquad\forall\tau\in[0,T],$$

если g не зависит от t. Пусть $P:\ E_n\to L_{c_1}$ есть ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$. Тогда

$$Ph(u)\neq 0\qquad\forall u\subset S_n\cap L_{\omega(c)}. \qquad (25)$$

Действительно, если $Ph(u_0)=0$ для некоторого $u_0\in S_n\cap L_{\omega(c)}$, то $h(u_0)\in G_{c_1}$, $F(h(u_0))>m(c_1)$. С другой стороны, поскольку $u_0\in L_{\omega(c)}\cap S_n$, то $F(u_0)\le c$ и из (24) следует $F(h(u_0))\le\gamma(c)\le m(c_1)$. Противоречие. Таким образом, непрерывное отображение $Ph\colon S_n\cap L_{\omega(c)}\to L_{c_1}$ удовлетворяет условию (25). Если функция g нечетна относительно u, то это противоречит теореме Borsuk-Ulam [15]. Если функция g не зависит от t, то это противоречит S^1 версии теоремы Borsuk-Ulam [15].

Следовательно, существует критическая точка u_n функционала F на E_n, для которой выполнено включение (23). Поэтому

$$\left(Au_n,w\right)+\int_0^T\int_0^\pi g\left(x,t,u_n\right)w\,dxdt=0\qquad\forall w\in E_n, \qquad (26)$$

$$\gamma(c)\le\frac{1}{2}\left(Au_n,u_n\right)+\int_0^T\int_0^\pi G\left(x,t,u_n\right)dxdt\le c. \qquad (27)$$

II. Если (26) умножить на $\frac{1}{2}$, положить в нем $w=u_n$ и вычесть из полученного равенства (27), то получим

$$-\gamma(c)\ge\int_0^T\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}g\left(x,t,u_n\right)u_n-G\left(x,t,u_n\right)\right)dxdt\ge-c$$

Из (17)-(19) следует существование константы B_1, такой, что

$$\delta|u|^p-\left(\frac{A_4}{2}+A_2\right)|u|-B_1\le\frac{1}{2}u\,g\left(x,t,u_n\right)-G\left(x,t,u_n\right)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{p}A_3\right)|u|^p+\left(\frac{A_2}{2}+A_5\right)|u|+B_1$$

при всех $(x,t,u)\in[0,\pi]\times R^2$. Здесь $\delta=\frac{1}{2}A_3-\frac{1}{r}A_1$. Следовательно,

$$\|u_n\|_p \le A_7, \tag{28}$$

$$\|u_n\|_p^p + A_8\|u_n\|_p + A_8 \ge A_8|c|. \tag{29}$$

Поскольку $\|u_n\|_r^r + 1 \ge \|u_n\|_r$, то из (29) выведем

$$\|u_n\|_r^r \ge \frac{C_1|c| - 2C_2}{C_2+1}. \tag{30}$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Из (28) следует существование подпоследовательности, которую также обозначим u_n, такой, что

$$u_n \to u \quad \text{в } L_r(\Omega) \text{ слабо}, \quad g(x,t,u_n) \to h \text{ в } L_q(\Omega) \text{ слабо}.$$

Здесь $q = \frac{r-1}{r}$. Докажем, что u есть решение (обобщенное).

Пусть $u_n = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}$, $u = u_1 + u_2 + u_3$; u_k, $u_{kn} \in N_k$, $k \in \{1,2,3\}$. Тогда $u_{kn} \to u_k$ слабо в $L_2(\Omega)$, $k \in \{1,2,3\}$.

На N_2 оператор A ограничен. Следовательно, $Au_{2n} \to Au_2$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Действительно, для любого $\varphi \in L_2(\Omega)$ имеем

$$(Au_{2n}, \varphi) = (Au_{2n}, \varphi_2) = (u_{2n}, A\varphi_2) \to (u_2, A\varphi_2) = (Au_2, \varphi).$$

Здесь φ_2 есть ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ функции φ на N_2.

Пусть $a_{mk}^n, b_{mk}^n, a_{mk}^0, b_{mk}^0$ есть коэффициенты Фурье u_n и u соответственно. Обозначим $J_R = \sum_{|\mu_{mk}| \ge R} |\mu_{mk}| \left(\left(a_{mk}^n\right)^2 + \left(b_{mk}^n\right)^2 \right)$. Возьмем $R > 2c_1 + c_1^2$ и

$$w = \sum_{|\mu_{mk}| \ge R} \operatorname{sgn}(\mu_{mk})\, \varphi_m(x) \left(a_{mk}^n \cos\left(\frac{a}{b}kt\right) + b_{mk}^n \sin\left(\frac{a}{b}kt\right) \right).$$

Подставим w в (26). Используя лемму 1 и неравенство Гельдера, выведем

$$J_R = -\int_\Omega g(x,t,u_n)\, w\, dx\, dt \le \|g(x,t,u_n)\|_q \|w\|_r \le C_3 C_1 \|w\|_\beta =$$

$$= C_3 C_1 \sqrt{\sum_{|\mu_{mk}| \ge R} \frac{|\mu_{mk}|}{|\mu_{mk}|^{1-\beta}} \left(\left(a_{mk}^n\right)^2 + \left(b_{mk}^n\right)^2 \right)} \le \frac{C_4}{R^{\frac{1-\beta}{2}}} \sqrt{J_R}.$$

Следовательно,

$$J_R \le \frac{C_4^2}{R^{1-\beta}} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left(\left(a_{mk}^n\right)^2 + \left(b_{mk}^n\right)^2 \right) = \lim_{n\to\infty} (Au_{3n}, u_{3n}) = \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left(\left(a_{mk}^0\right)^2 + \left(b_{mk}^0\right)^2 \right).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в (26) при фиксированном $w \in E_{n_1}$, $n_1 \in N$:

$$(Au_2, w) + (u_3, Aw) + \int_\Omega hw\, dx\, dt = 0. \tag{31}$$

Докажем, что $h = g(x,t,u)$, методом монотонности. Для любого элемента $v \in L_r(\Omega) \cap D(A)$ имеем

$$\left(Av_2 - Au_{2n}, v_2 - u_{2n}\right) + \int_\Omega \left(g(x,t,v) - g(x,t,u_n)\right)(v - u_n)\, dx\, dt \ge 0. \tag{32}$$

Положим в (26) $w = u_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(Au_{2n},u_{2n}\right)+\int_{\Omega}g\left(x,t,u_n\right)u_n\,dx\,dt\right]=-\sum_{(m,k)\in M}\mu_{mk}\left(\left(a_{mk}^0\right)^2+\left(b_{mk}^0\right)^2\right). \tag{33}$$

Подставим в (31) $w=u_n$ и устремим $n\to\infty$:

$$\left(Au_2,u_2\right)+\int_{\Omega}hu\,dx\,dt=-\sum_{(m,k)\in M}\mu_{mk}\left(\left(a_{mk}^0\right)^2+\left(b_{mk}^0\right)^2\right).$$

Отсюда и из (33) получим

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(Au_{2n},u_{2n}\right)+\int_{\Omega}g\left(x,t,u_n\right)u_n\,dx\,dt\right]=\left(Au_2,u_2\right)+\int_{\Omega}hu\,dx\,dt. \tag{34}$$

Перейдем в (32) к пределу при $n\to\infty$:

$$\left(Av_2-Au_2,v_2-u_2\right)+\int_{\Omega}\left(g\left(x,t,v\right)-h\right)\left(v-u\right)dx\,dt\ge 0.$$

Возьмем $v=u+\tau\psi,\ \tau>0,\ \psi\in L_r\cap D(A)$:

$$\tau\left(A\psi,\psi_2\right)+\int_{\Omega}\left(g\left(x,t,u+\tau\psi\right)-h\right)\psi\,dxdt\ge 0.$$

Устремим $\tau\to 0$:

$$\int_{\Omega}\left(g\left(x,t,u\right)-h\right)\psi\,dx\,dt\ge 0\quad\forall\psi\in L_r(\Omega)\cap D\left(A\right).$$

Следовательно, $h=g\left(x,t,u\right)$. Отсюда и из (31) следует, что u является обобщенным решением. Оценка $\|u\|_r\ge d$ вытекает из (17) , (30) , (34).

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть b является нечетным числом. В этом случае $u_2=0$ и из (31) вытекает соотношение

$$\left(u_3,Aw\right)=-\int_{\Omega}hw\,dx\,dt \tag{35}$$

при всех $w\in\bigcup_{n\in N}E_n$. Пусть a_{mk},b_{mk} есть коэффициенты Фурье функции $(-h)\in L_q(\Omega)$ по системе Λ. Подставив в (35)

$$w=\varphi_m(x)\cos\left(\frac{a}{b}kt\right),\quad w=\varphi_m(x)\sin\left(\frac{a}{b}kt\right),$$

где $(m,k)\in M$, получим

$$a_{mk}^0=\frac{1}{\mu_{mk}}a_{mk},\ b_{mk}^0=\frac{1}{\mu_{mk}}b_{mk}. \tag{36}$$

Следовательно,

$$u_3=\sum_{(m,k)\in M}\frac{1}{\mu_{mk}}\varphi_m(x)\left(a_{mk}\cos\left(\frac{a}{b}kt\right)+b_{mk}\sin\left(\frac{a}{b}kt\right)\right) \tag{37}$$

(частичные суммы $\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}$ данного ряда сходятся в L_q к u_3 при $N\to\infty$). Обозначим

$$I=\sum_{(m,k)\in M}\frac{1}{|\mu_{mk}|}(|a_{mk}|+|b_{mk}|).$$

Используя неравенства Хаусдорфа-Юнга и Гельдера, получим

$$I\le\left(\sum_{(m,k)\in M}(|a_{mk}|^p+|b_{mk}|^p)\right)^{1/p}\left(\sum_{(m,k)\in M}\frac{1}{|\mu_{mk}|^q}\right)^{1/q}\le A_9\,\|h\|_q\left(\sum_{(m,k)\in M}\frac{1}{|\mu_{mk}|^q}\right)^{1/q}.$$

Константа A_9 не зависит от u. Следовательно, ряд (37) сходится равномерно, $u_3 \in C(\Omega)$. Из конечномерности N_1 вытекает включение $u = u_1 + u_3 \in C(\Omega)$. Таким образом, $h = g(x,t,u) \in C(\Omega)$. Следовательно,

$$\sum_{(m,k)\in M} (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) < \infty. \tag{38}$$

Из (35),(38) следует

$$\sum_{(m,k)\in M} (\mu_{mk})^2 ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2) < \infty. \tag{39}$$

Из (16) при $(m,k)\in M$ выведем $\dfrac{k}{|\mu_{mk}|} \le C_0$. Отсюда и из (39) выведем неравенство

$$\sum_{(m,k)\in M} k^2 ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2) = \sum_{(m,k)\in M} \frac{k^2}{(\mu_{mk})^2} (\mu_{mk})^2 ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2) < \infty. \tag{40}$$

Из сходимости ряда (39) следует включение $u_t \in L_2(\Omega)$.

При $(m,k)\in M$, согласно (16), справедлива также оценка $\dfrac{m}{|\mu_{mk}|} \le C_0$. Из этого неравенства, (9) и (39) получим

$$\sum_{(m,k)\in M} \lambda_m^2 ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2) = \sum_{(m,k)\in M} \frac{\lambda_m^2}{(\mu_{mk})^2} (\mu_{mk})^2 ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2) < \infty. \tag{41}$$

Из (40) и ортонормированности в $L_2(0,\pi)$ системы (8) следует включение $u_x \in L_2(\Omega)$. Теорема доказана.

В доказанной теореме приведены условия существования периодических по времени решений квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями на отрезке, одно из которых является условием Неймана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barby, V. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients/ V. Barby, N. H. Pavel // Trans. Amer. Math. Soc.-1997.-V. 349. - № 5.- P. 2035-2048.
2. Rabinowitz, P. Free vibration for a semilinear wave equation/ P. Rabinowitz//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31.- № 1.- P. 31-68.
3. Bahri, A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation/A. Bahri, H. Brezis// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 1980.- V. 85. – P. 3130-320.
4. Brezis, H. Forced vibration for a nonlinear wave equations/ H. Brezis, L. Nirenberg //Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31. - № 1.- P. 1-30.
5. Плотников, П. И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения/П. И. Плотников// Математический сборник. - 1988.-Т. 136(178).- № 4(8). - С. 546-560.
6. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term/ E. Feireisl //Chechosl. Math. J.- 1988.-V. 38.- № 1.- P.- 78-87.
7. Рудаков, И.А. Нелинейные колебания струны/ И.А. Рудаков//Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем., мех. – 1984.- № 2. – С. 9-13.
8. Рудаков, И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами/ И. А. Рудаков //Математические заметки. -2004. -Т. 76.- Вып. 3. -С. 427-438.
9. Shuguan, J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x - dependet coefficients/ J. Shuguan//Calc. Var. -2008.-V. 32. – P. 137-153.
10. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами/ И.А. Рудаков //Математический сборник. -2007.-Т. 198.- № 4(8). - С. 546-560.

11. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами / И.А. Рудаков, А.П. Лукавый // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2014. – № 3. – С. 147-155.
12. Рудаков, И.А. О периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения/ И.А. Рудаков // Труды МИАН. -2010. – Т. 270. – С. 226-232.
13. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения/ Ф.Трикоми. – М.: УРСС, 2003.-351 с.
14. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of rectangle thin plate/ E. Feireisl //Chechosl. Math. J.-1988.-V. 37.- № 1.- P.- 334-341.
15. Fadell, E.R. Borsuk-Ulam theorem for arbitrary S^1 actions and application/E.R. Fadell, S. Y. Husseini, P.H. Rabinowitz//Trans. Amer. Math. Soc.-1982.-V. 274.- № 1.- P.- 345-360.

Материал поступил в редколлегию 10.04.15.