

УДК 629.4.015:539.3

В.И. Сакало, А.В. Сакало

## ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕРЦА ДЛЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ<sup>1</sup>

На примере решения контактной задачи для колеса и рельса при расположении пятна контакта на выкружке колеса, а на рельсе – на галтельной части исследована возможность использования решения Герца при близких значениях радиусов кривизны их профилей. Эта же задача решена методом конечных элементов. Предложены поправочные коэффициенты для уточнения таких параметров, как размеры пятна контакта и максимальное давление, полученных аналитическим методом.

Ключевые слова: контактная задача, решение Герца, пятно контакта, максимальное контактное давление, метод конечных элементов.

Герцем получено решение контактной задачи для двух твёрдых упругих тел с использованием некоторых предположений: поверхности контакта тел в окрестности начальной точки контакта могут быть описаны уравнениями полиномов второй степени; размеры области давления, или пятна контакта, малы по сравнению с размерами тел, что позволяет представить тела в расчётной схеме полупространствами. При таких ограничениях решение применимо для весьма узкого круга контактных задач. Однако оно используется для приближенной оценки контактных напряжений в зубьях колёс зубчатых зацеплений (в этом случае контур поверхности зуба описывается уравнением эвольвенты), деталях шарикоподшипника (близость радиусов шарика и жёлоба кольца может придать пятну контакта пространственный характер), колёсах подвижного состава железных дорог и рельсах [6; 7]. Во всех этих случаях не выполняется предположение о малости размеров пятна контакта по сравнению с размерами тел. В процессе эксплуатации поверхности контактирующих тел изнашиваются. При приработке меняется уравнение зазора между контактирующими поверхностями. Возможны случаи тесного контакта. При описании поверхностей контакта полиномами четвёртой степени могут быть получены двугорбые эпюры контактных давлений. Если контактное пятно имеет заметно выраженный пространственный характер, возможность использования решения Герца может быть поставлена под сомнение. Это наблюдается, например, для изношенных колёс и рельсов при расположении пятна контакта на галтельных участках.

**Постановка задачи.** В работе рассмотрена возможность использования решения Герца для случаев, когда пятно контакта располагается на галтельных участках колеса и рельса. Исследования профилей поверхностей изношенных колёс и рельсов, уложенных в кривые участки пути, показали, что они близки по очертанию на участке колеса, расположенном между кругом катания и вершиной гребня, а для рельса – на его внутренней части. В частности, при контактировании их галтельными участками радиусы кривизны галтели рельса и выкружки колеса могут быть близки по значениям.

С целью оценки возможности использования для определения контактных напряжений решения Герца применён также численный метод – метод конечных элементов. Рассмотрен случай контакта набегающего колеса при движении в кривом участке пути. Приняты значения сил взаимодействия колеса и рельса: вертикальной – 100 кН, боковой – 60 кН. Положение начальной точки контакта на галтельном участке рельса, радиус которого принят равным 15 мм, определяется угловой координатой  $\varphi = 40^\circ$ , отсчитанной от вертикальной линии, проходящей через центр окружности (рис. 1). Угол набегания колеса на рельс принят равным нулю. Главные радиусы кривизны поверхностей в начальной точ-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00662 А)

ке контакта: рельса –  $R_{11} = \infty$ ,  $R_{12} = 15$  мм, колеса (в плоскости, проходящей через начальную точку контакта и нормаль к ней параллельно оси рельса) –  $R_{21} = R_k / \cos \varphi = 554$  мм, где  $R_k = 475$  мм – радиус круга катания колеса. Радиус галтельного участка профиля рельса  $R_{22}$  варьировался в диапазоне 15,25...15,6 мм. Радиусам приписаны нижние индексы: первый по – номеру тела, второй – по номеру главной плоскости.

Для определения размеров полуосей эллипса контакта  $a$  и  $b$  и распределения давлений использованы зависимости, приведенные в работе [1]. С учётом того, что угол  $\psi$  между плоскостями поверхностей колеса и рельса, содержащими главные радиусы кривизны, равен нулю и  $R_{11} = \infty$ , они принимают вид

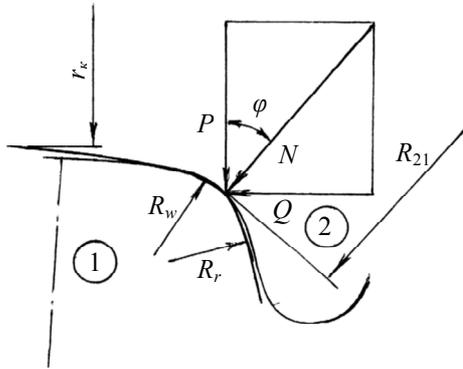


Рис. 1. Схема контакта галтельных участков колеса и рельса

$$A + B = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right];$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right];$$

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{N(k_1 + k_2)}{A + B}};$$

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{N(k_1 + k_2)}{A + B}};$$

где  $k_1 + k_2 = 2 \frac{1 - \mu^2}{\pi E} = 0,29 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль упругости материалов колеса и рельса;  $\mu = 0,3$  – коэффициент Пуассона;  $N$  – нормальная сила в контакте; коэффициенты  $m$  и  $n$  определяются по таблице в зависимости от  $\theta$  [1].

Максимальное давление в контакте равно

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi ab}.$$

Пятно контакта имеет форму круга при  $\theta = 90^\circ$ , или  $\cos \theta = 0$ , а следовательно,  $B - A = 0$ . Такое пятно получается при  $R_{22} = -15,42$  мм. Кроме этого вариант рассмотрен случай  $R_{22} = -15,6$  мм, когда пятно располагается большей полуосью вдоль рельса, а также представляющие наибольший интерес  $R_{22} = -15,3$  и  $-15,25$  мм, когда пятно вытянуто поперёк рельса и имеет явно выраженный пространственный характер. Знак величины  $B - A$  зависит от выбора главных плоскостей кривизны поверхностей. Для получения её положительного значения для случая, когда пятно вытянуто вдоль рельса, первая главная плоскость должна быть перпендикулярна оси рельса.

Для численного решения задачи использована конечноэлементная схема, показанная на рис. 2. В ней представлены фрагменты колеса и рельса, прилегающие к области контакта. Сетка построена на основе узлов, расположенных на профилях колеса и рельса с шагом 0,5 мм. Размеры конечных элементов по осям  $y$  и  $z$  приняты равными 1 мм. Трёхмерная сетка получена методом «драги». Нагрузка прикладывалась к фрагментам кинематическим способом – путём задания перемещений узлам, расположенным на поверхности фрагмента колеса, противоположащей контактной поверхности, по направлению нормали к начальной точке контакта. На узлы, расположенные на нижней поверхности фрагмента рельса, накладывались связи. Значения смещений подбирались так, чтобы нормальная сила в контакте получалась равной 116,6 кН.

**Анализ результатов расчётов.** Распределения контактных давлений на поверхности рельса для вариантов, при которых радиусы профиля выкружки колеса равны 15,6 и 15,25 мм, показаны на рис. 3. В обоих случаях контактные пятна имеют пространственный характер. При радиусе выкружки 15,6 мм эллипс контакта большей полуосью длиной 8,002 мм располагается вдоль рельса. Длина малой полуоси равна 5,587 мм. На профиле

рельса пятну соответствует участок дуги окружности с угловым измерением  $42,7^\circ$ , во втором случае –  $58,7^\circ$ . Законы распределения давлений в точках осей  $x$  и  $z$  близки к эллиптическим. Отклонения от распределений по эллипсам наибольшие у контуров пятен контакта, где давления значительно ниже, чем у центра пятна. Они достигают 6,01 и 8,6%.

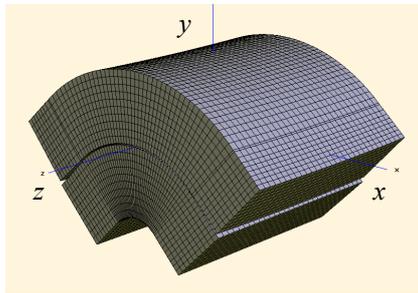


Рис. 2. Конечноэлементная схема фрагментов колеса и рельса

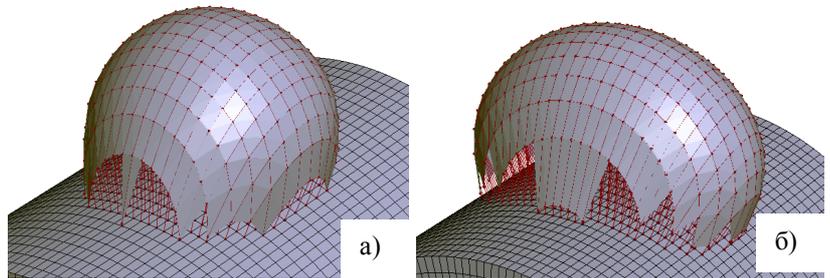


Рис. 3. Распределения контактных давлений при радиусе галтели рельса 15 мм и радиусах выкружки колеса (мм): а – 15,6; б – 15,25

Сравнить распределения давлений в точках оси  $x$ , полученные методом конечных элементов и с использованием решения Герца, позволяют графики, представленные на рис. 4. Наблюдаются две закономерности. Численным и аналитическим методами получены практически одинаковые размеры контактных пятен по оси  $z$ . Аналитическое решение даёт заметно большую длину пятна по оси  $x$ , чем численное. Следствием этого является заниженное максимальное давление в контакте.

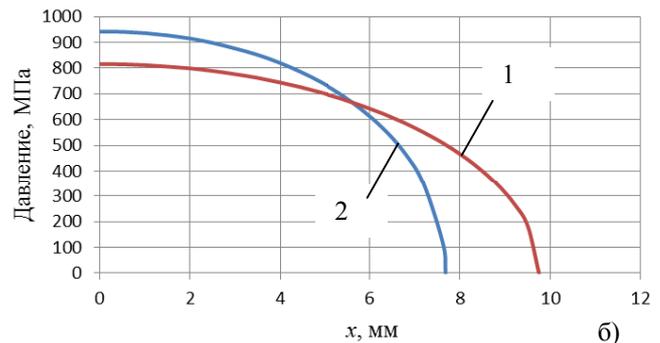
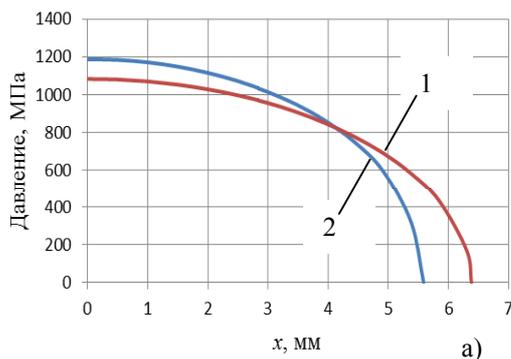


Рис. 4. Распределения контактных давлений в точках оси  $x$  (1 – решение Герца; 2 – численное решение) при радиусе галтели рельса 15 мм и радиусах выкружки колеса (мм): а – 15,6; б – 15,25

Результаты расчётов, полученные с использованием решения Герца и численного метода, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость размеров контактного пятна и максимального давления от отношения радиусов выкружки колеса и галтели рельса

Параметры контакта		Отношение радиусов выкружки и галтели рельса			
		1,04	1,028	1,02	1,017
$a_z$ , мм	МКЭ	8,002	7,35	7,208	7,0175
	Герц	8,059	7,606	7,208	6,986
$a_x$ , мм	МКЭ	5,587	6,45	7,226	7,68
	Герц	6,38	7,606	8,936	9,75
$p_0$ , МПа	МКЭ	1187	1083	980	942
	Герц	1083	962	864	816
$k_a$		0,875	0,848	0,809	0,788
$k_p$		1,096	1,126	1,134	1,154

В табл. 1  $a_z, a_x$  – полуоси пятна контакта в продольном и поперечном относительно оси рельса направлениях,  $k_p$  – поправочный коэффициент для максимальных контактных давлений, равный отношению  $p_0$ , полученных методом конечных элементов и с помощью решения Герца,  $k_a$  – поправочный коэффициент для длины полуоси  $a_x$ .

**Влияние нормальной силы в контакте на коэффициенты  $k_a$  и  $k_p$ .** Выше рассмотрено влияние отношения радиусов выкружки колеса и галтельного участка рельса на значения поправочных коэффициентов  $k_a$  и  $k_p$ . Очевидно, на них должна влиять и величина нормальной силы в контакте. Чем больше сила, тем сильнее проявляется пространственный характер поверхности контакта в нарушение допущений, принятых в аналитическом решении.

Численным и аналитическим методами получены решения контактной задачи для варианта с радиусом выкружки 15,25 мм при пяти значениях нормальной силы. Значения поправочных коэффициентов зависят от нормальной силы в контакте следующим образом:

Сила, кН	40,53	62,7	80,7	100,8	116,6
$k_a$	0,87	0,848	0,833	0,801	0,788
$k_p$	1,072	1,1	1,12	1,114	1,154

С увеличением нормальной силы коэффициент  $k_a$  уменьшается, а коэффициент  $k_p$  увеличивается, причём на значение коэффициента  $k_a$  она оказывает большее влияние.

Решение Герца используется для определения контактных напряжений в деталях подшипников качения. Представляет интерес выяснить, есть ли необходимость использования поправочных коэффициентов при решении такого класса задач. Рассмотрим это на примере шарикоподшипника №226 лёгкой серии. Примем следующие значения его параметров [2]: радиус внутреннего кольца  $r_i = 76$  мм, диаметр шарика  $D_w = 28,57$  мм, количество шариков  $z = 11$ , радиус профиля жёлоба внутреннего кольца  $\rho_i = 1,03$ ,  $D_w/2 = 14,71355$  мм [3], статическая грузоподъёмность – 112 кН. Для определения силы, приходящейся на шарик, воспользуемся зависимостью [4]

$$F_r = F_0 \left( 1 + 2 \sum_1^n \cos^{5/2} i\gamma \right),$$

где  $F_0$  – сила, приходящаяся на наиболее нагруженный шарик;  $\gamma$  – угол, под которым расположен шарик относительно вертикальной силовой плоскости;  $n$  – половина тел качения в нагруженной зоне.

Пусть центр наиболее нагруженного шарика располагается в вертикальной силовой плоскости. Угловое расстояние между центрами шариков  $\gamma$  равно  $360/z = 32,73^\circ$ . В нагруженной зоне располагается 5 шариков.

Тогда

$$1 + 2 \sum_1^n \cos^{5/2} i\gamma = 1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma = 2,52$$

и сила, приходящаяся на наиболее нагруженный шарик, равна

$$F_0 = F_r / 2,52 = 44,4 \text{ кН.}$$

Припишем шарiku номер 1, а внутреннему кольцу номер 2 и, располагая первую главную плоскость перпендикулярно оси подшипника, для главных радиусов кривизны получим  $R_{11} = D_w/2$ ,  $R_{12} = D_w/2$ ,  $R_{21} = r_i$ ,  $R_{22} = -\rho_i$ . Найдём величины [1]

$$A + B = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right] = 42,6 \text{ м}^{-1};$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right] = 40,56 \text{ м}^{-1};$$

$$\cos \theta = (B - A) / (A + B) = 0,952.$$

Величины  $m$  и  $n$ , используемые для определения размеров полуосей эллипса контакта, находятся по таблицам в зависимости от  $\theta$  [1] или  $\cos \theta$  [5]. При больших эксцентриситетах эллипсов контактов более удобна табл. 2, приведенная в работе [5].

Таблица 2

Значения коэффициентов  $m$  и  $n$ 

$\cos\theta$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$m$	1	1,07	1,15	1,25	1,36	1,46	1,66	1,89
$n$	1	0,931	0,871	0,821	0,760	0,721	0,666	0,610
$\cos\theta$	0,8	0,85	0,9	0,95	0,97	0,99	0,997	1,0
$m$	2,29	2,60	3,09	4,08	5,09	7,83	12,21	-
$n$	0,539	0,506	0,461	0,396	0,356	0,290	0,224	-

Для вычисленного значения  $\cos\theta = 0,952$  получаем  $m = 4,282$ ,  $n = 0,392$ . Приняв  $N = 40$  кН, определим длину большой полуоси эллипса контакта:

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3\pi N(k_1 + k_2)}{4(A+B)}} = 4,282 \sqrt[3]{\frac{3\pi \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 0,29 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 42,6}} = 7,96 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,96 \text{ мм.}$$

Аналогично вычислим длину малой полуоси. Получим  $b = 0,728$  мм.

Угловое измерение контакта на профиле жёлоба внутреннего кольца, или угол контакта, составляет  $60,8^\circ$ .

Максимальное контактное давление равно

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi ab} = 3296 \text{ МПа.}$$

Получена область контакта с явно выраженной пространственной геометрией. Для уточнения размера  $a$  контактного пятна и максимального давления могут быть использованы поправочные коэффициенты [6; 7].

Выводы:

1. Робастность решения Герца для контактной задачи поразительна. Даже для вариантов контакта выпуклого тела с телом с вогнутой поверхностью с отношением главных радиусов впадины и выпуклости, достигающим 1,017, решение обеспечивает приемлемые для инженерных расчётов результаты, несмотря на то что в нём использованы модели полупространств.

2. Методом конечных элементов и с использованием решения Герца определены размеры контактных пятен и распределения контактных давлений для вариантов контакта выкружки колеса и галтельного участка рельса, радиусы которых близки по значениям. Найдены значения поправочных коэффициентов  $k_a$  и  $k_p$  для определения полудлины пятна и максимального давления, уточняющие полученные на основе решения Герца.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Перель, Л.Я. Подшипники качения / Л.Я. Перель, А.А. Филатов. – М.: Машиностроение, 1992. – 608 с.
3. Орлов, А.В. Оптимизация рабочих поверхностей опор качения / А.В. Орлов. – М.: Наука, 1973. – 84 с.
4. Решетов, Д.Н. Детали машин / Д.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.
5. Пинегин, С.В. Контактная прочность и сопротивление качению / С.В. Пинегин. – М.: Машиностроение, 1969. – 243 с.
6. Безъязычный, В.Ф. Расчетное определение технологических условий обработки, обеспечивающих заданную контактную жесткость сопрягаемых поверхностей / В.Ф. Безъязычный // Справочник. Инженерный журнал. Приложение. – 2014. - № 8. – С. 9-15.
7. Киричек, А.В. Исследование контактного взаимодействия при накатывании резьб и профилей с динамическим нагружением инструмента / А.В. Киричек, А.Н. Афонин // Изв. ОрелГТУ. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2009. - № 2-2/274 (560). – С. 72-77.

Материал поступил в редколлегию 24.02.15.