

УДК 629.4.015:539.3

В.И. Сакало, А.В. Сакало

**КОЭФФИЦИЕНТ ВНЕДРЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В БЫСТРОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОЛЕСА И РЕЛЬСА<sup>1</sup>**

Определены значения коэффициентов внедрения поверхностей колеса и рельса, используемых при применении быстрого алгоритма для решения нормальных контактных задач. Рассмотрены три случая: область контакта имеет не сильно выраженный пространственный характер; пятно контакта располагается вблизи середины поверхности качения рельса, радиусы кривизны профилей колеса и рельса близки по значению; пятно располагается на галтельных участках профилей.

Ключевые слова: быстрый алгоритм, коэффициент внедрения, область контакта, распределение контактных давлений, метод конечных элементов.

При решении нормальной контактной задачи для колеса и рельса с применением быстрого алгоритма используется коэффициент внедрения их поверхностей. Его введение в расчет обусловлено способом определения формы и размеров пятна контакта. Он состоит в том, что контактирующие тела представляются поверхностями, которые могут проникать одна сквозь другую. Поверхности располагаются так, что они контактируют в одной точке, называемой точкой начального контакта. Затем одной из них задается перемещение  $\delta$  в направлении общей нормали в точке начального контакта. Линия пересечения поверхностей, которая является линией равных зазоров  $\delta$  между поверхностями контакта, могла бы быть принята за контур контактного пятна [1;2]. Реальная область контакта меньше очерченной этой линией в связи с тем, что точки поверхностей, расположенные у её контура, перемещаются от контактирующих поверхностей внутрь тел под действием давлений на действительной поверхности контакта и не входят в контакт. Реальную область контакта определяют как область, ограниченную линией пересечения поверхностей при внедрении, умноженном на величину, называемую коэффициентом внедрения. В работе [1] рекомендуется принимать его равным 0,55, а в работе [3] – равным 0,65.

Для определения распределения давлений на поверхности контакта используются различные способы. Как правило, вводится предположение о том, что по направлению качения колеса они распределены по уравнению эллипса или квадратичной параболы.

Решение нормальной контактной задачи зависит от уравнения зазора между поверхностями контакта тел. Оно может быть задано в аналитической форме либо дискретно. Для уравнения зазора используют полином второй степени. При численном решении для решения задач тесного контакта может быть использован полином четвёртой степени. При сопоставлении решений контактных задач, полученных с применением конечноэлементных расчётных схем и быстрого алгоритма, установлено, что в зависимости от уравнения зазора коэффициент внедрения может меняться в широких пределах – от 0,3 до 0,7 при принятых диапазонах варьирования коэффициентов полинома.

Решение контактной задачи для колеса и рельса упрощается благодаря двум обстоятельствам: поверхность колеса представляет собой поверхность вращения, а поверхность рельса – некруглый цилиндр. Пусть начало декартовой системы координат располагается в точке начального контакта колеса и рельса, ось  $x$  направлена параллельно оси рельса, ось  $z$  – по касательной к контуру поперечного сечения рельса, ось  $y$  – вдоль общей нормали к поверхностям контакта (рис. 1). Тогда уравнение зазора в плоскостях, параллельных  $xu$ , представляется уравнением окружности или квадратичной параболы.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00662 А).

Необходимость в решении нормальной контактной задачи для колеса и рельса возникает при моделировании движения железнодорожного экипажа. На шаге интегрирования дифференциальных уравнений движения на её основе с применением, как правило, алгоритма FASTSIM [3] получается распределение касательных напряжений на поверхности контакта, зависящее от кривизны и спина, определяются касательные силы, вводимые в уравнения. Если для моделирования движения применяется метод, дающий значение нормальной силы в контакте на каждом шаге по времени, форма контакта и распределение давлений могут быть определены непосредственно из решения Герца при условиях: изменением радиусов кривизны поверхностей колеса и рельса в плоскости уз в пределах контакта можно пренебречь, эти радиусы кривизны не слишком близки по значениям. Если радиусы кривизны близки, решение Герца не может быть использовано. Как правило, оно не может быть использовано для случаев, когда контакт располагается вблизи галтельных участков колеса и рельса, так как даже при небольшой протяженности контакта вдоль контуров их поперечных сечений радиусы кривизны сильно меняются. В этих случаях для решения контактной задачи следует применять быстрый алгоритм.

Если применяется метод, дающий значение внедрения поверхностей колеса и рельса на каждом шаге, для решения контактной задачи необходимо использование быстрого алгоритма.

Практический интерес в первую очередь представляют следующие варианты, для которых необходимо определить коэффициенты внедрения:

1. Пространственный характер области контакта не сильно выражен. Такой контакт можно заменить эквивалентным герцевским [4], для которого решение можно получить аналитическим методом: размеры области контакта и распределение давлений – из решения Герца, внедрение поверхностей контакта – через сближение тел [5]. В работе эта задача решалась также методом конечных элементов для определения параметров конечно-элементных схем, обеспечивающих корректное решение.

2. Контакт располагается в средней части поверхности катания колеса, радиусы кривизны профилей поверхностей колеса и рельса близки по значениям, пятно носит пространственный характер и вытянуто в поперечном направлении относительно рельса.

3. Контакт располагается на галтельных участках колеса и рельса, причём радиусы галтелей близки по значениям.

В работе для решения контактных задач применён метод конечных элементов.

При рассмотрении первого варианта моделировалась задача контакта двух стальных цилиндров со взаимно перпендикулярными осями. Радиус одного из них  $R_2$  был принят равным 200 мм, а радиус другого  $R_1$  варьировался в диапазоне от 200 до 2500 мм. Из цилиндров выделены фрагменты размерами  $40 \times 30 \times 50$  мм по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно (рис. 1). В области предполагаемого контакта размер шестигранного конечного элемента составил 0,5 мм. На узлы фрагмента 2, расположенные на его нижней грани, накладывались связи по трём осям. Узлам фрагмента 1, лежащим на верхней грани, задавались перемещения  $\delta$  по оси  $z$ , накладывались связи, позволяющие перемещения узлов, расположенных на оси  $z$ , только по её направлению. Перемещение  $\delta$  подбиралось таким образом, чтобы в контакте возникала нормальная сила  $N$ , равная 100 кН.

Слабым местом решения контактной задачи методом конечных элементов является зависимость точности определения размеров эллиптического контактного пятна от размеров конечных элементов. Для повышения точности определения длины полуоси использовалось распределение давлений по полуэллипсу:

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (1)$$

По результатам расчёта определялось давление  $p_A$  в точке  $A$  с координатой  $x_A$ , расположенной на оси  $x$  (рис. 2). Из выражения (1) размер полуоси равен

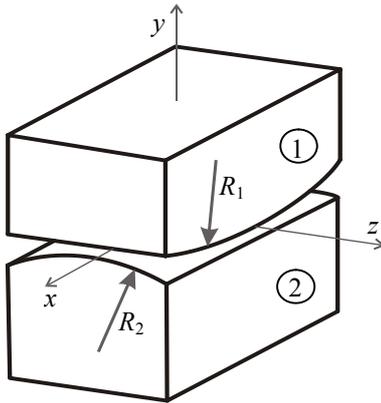


Рис. 1. Фрагменты цилиндров

$$a = \frac{x_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_A}{p_0}\right)^2}}. \quad (2)$$

Для того чтобы при применении быстрого алгоритма получить размер полуоси пятна контакта  $a$ , необходимо фрагменту 1 задать внедрение  $\delta_0$  (рис. 3). Уравнение окружности – профиля контактной поверхности этого фрагмента:

$$x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2.$$

Выразим отсюда  $y$ :

$$y = R_1^2 - \sqrt{R_1^2 - x^2}.$$

Подставив  $x = a$ ,  $y = \delta_0$ , получим необходимое внедрение:

$$\delta_0 = R_1^2 - \sqrt{R_1^2 - a^2}. \quad (3)$$

С использованием зависимостей (2) и (3) определяется коэффициент внедрения

$$K_B = \delta_0 / \delta.$$

Аналогично определяется внедрение, необходимое для получения другой полуоси эллипса контакта –  $b$ . Эллипсы, получаемые при решении контактной задачи для пятна контакта и получаемые с применением быстрого алгоритма как линии пересечения внедрённых поверхностей, не являются подобными. Поэтому при подборе коэффициента внедрения, обеспечивающего необходимый размер полуоси  $b$ , он отличается от полученного с использованием зависимости (3). В связи с этим внедрение задавалось таким,

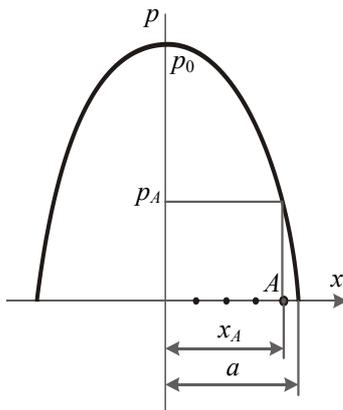


Рис. 2. Уточнение длины полуоси эллипса контакта

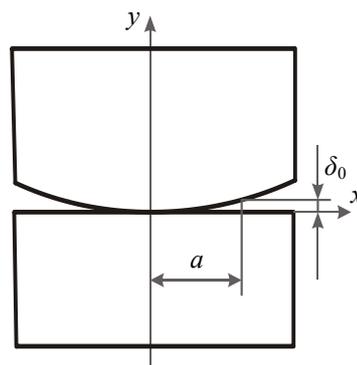


Рис. 3. Определение необходимого внедрения поверхностей

чтобы в быстром алгоритме площадь пятна контакта равнялась площади герцевского контакта  $\pi ab$ . Профили поверхностей фрагментов могут быть приближённо заданы уравнениями

$$y = \frac{x^2}{2R_1}, \quad y = \frac{z^2}{2R_2}. \quad (4)$$

При задании внедрения  $\delta_0$  в первое уравнение зависимостей (4) необходимо подставить  $y = \delta_0$ ,  $x = a_3$ , а во второе –  $y = \delta_0$ ,  $z = b_3$ , где  $a_3$ ,  $b_3$  – полуоси эллипса, эквивалентного по площади действительной области контакта. Тогда быстрый алгоритм даёт полуоси

$$a_3 = \sqrt{2R_1\delta_0}, \quad b_3 = \sqrt{2R_2\delta_0}.$$

Определяем коэффициент внедрения:

$$\pi ab = \pi 2\delta_0 \sqrt{R_1 R_2}, \quad \delta_0 = \frac{ab}{2\sqrt{R_1 R_2}}, \quad K_B = \frac{ab}{2\delta \sqrt{R_1 R_2}}.$$

Результаты расчётов параметров контакта и коэффициента внедрения с использованием решения Герца и быстрого алгоритма представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры контакта двух цилиндров и значения коэффициентов внедрения при  $N = 100$  кН,  $R_2 = 200$  мм

Радиус $R_1$ , мм	200	300	400	600	1000	1400	1800	2500
Внедрение $\delta$ , мм	0,1325	0,1235	0,117	0,108	0,0997	0,091	0,086	0,08
Максимальное давление $p_0$ , МПа	1776	1556	1429	1274	1116	1028	969	902
Длины полуосей	$a$ , мм	5,15	6,29	7,22	8,76	11,09	13	14,41
	$b$ , мм	5,15	4,81	4,57	4,23	3,83	3,58	3,41
$\beta = b/a$	1	0,764	0,633	0,483	0,345	0,278	0,236	0,19
$K_B$	0,5	0,5	0,5	0,49	0,486	0,48	0,476	0,47

В табл. 1 приведены значения коэффициентов внедрения, полученные с использованием решения Герца. В качестве внедрений взяты сближения тел, зависимость для которых приведена в работе [5]. Их величина чувствительна к размерам выделенных фрагментов и конечных элементов при решении задач методом конечных элементов. При недостаточности больших размеров фрагментов необходимое для получения заданной силы в контакте внедрение получается заниженным, а коэффициент внедрения – завышенным. Значения отношения  $\beta = b/a$ , полученные путём решения задачи Герца и с применением быстрого алгоритма, различаются (табл. 2).

Таблица 2

Значения  $\beta = b/a$  (для тех же условий, что и в табл. 1)

Радиус $R_1$ , мм	200	300	400	600	1000	1400	1800	2500
Решение Герца	1	0,764	0,633	0,483	0,345	0,278	0,236	0,19
Быстрый алгоритм	1	0,816	0,707	0,58	0,45	0,378	0,333	0,28

Из данных, приведенных в табл. 2, видно, что эллиптические области контакта, определяемые из решения Герца и с применением быстрого алгоритма, не являются подобными. Причём эта тенденция усиливается с увеличением эксцентриситета эллипса.

Второй вариант представлен задачей контакта колеса и рельса с изношенными поверхностями катания. Предполагается, что контакт располагается вблизи середины поверхности качения рельса, радиусы кривизны профилей не меняются в пределах предполагаемого пятна контакта и приняты равными: для рельса –  $R_p = 500$  мм, для колеса –  $R_{к1} = 530$  мм. В плоскости перекатывания колеса его радиус  $R_k$  равен радиусу круга катания 475 мм. Конечноразмерные схемы фрагментов, прилегающих к поверхностям контакта, показаны на рис. 4а. Используются шестигранные конечные элементы с размерами рёбер в области контакта 1 мм.

Внедрение контактных поверхностей фрагментов реализовано заданием перемещения  $\delta$  узлов, расположенных на верхней грани фрагмента 1, по оси  $y$ , равного 0,051 мм, при закреплённой нижней грани фрагмента 2. В результате решения контактной задачи получена нормальная сила на поверхности контакта, равная 100,4 кН. Максимальные давления в центре контакта – 469,4 МПа. Размеры полуосей пятна контакта, найденные с применением процедуры уточнения, составили:  $a = 26,21$  мм – по оси  $x$ ,  $b = 4,02$  мм – по оси  $z$  (рис. 4б).

Площадь области контакта вычислена как для плоской эллиптической области:  $F = \pi ab = 331 \text{ мм}^2$ .

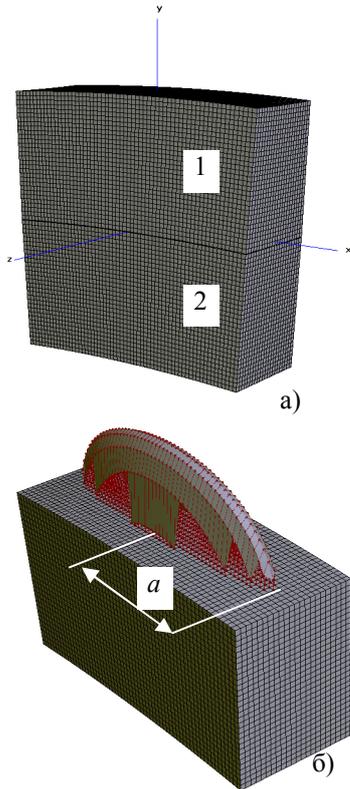


Рис. 4. Конечноэлементная модель фрагментов (а) и распределение давлений на поверхности контакта (б)

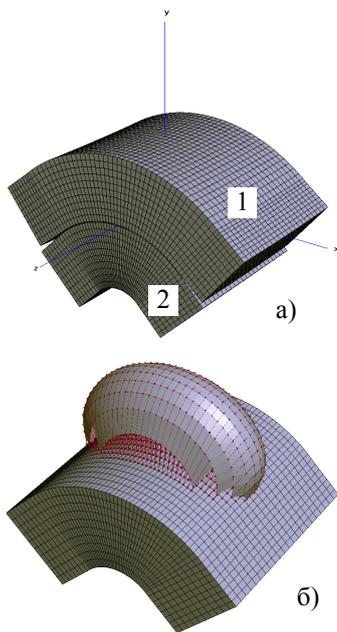


Рис. 5. Конечноэлементная модель фрагментов (а) и распределение давлений на поверхности контакта (б)

При определении внедрения поверхности колеса, которое необходимо задать при применении быстрого алгоритма, использованы приближённые уравнения окружностей, получаемых в сечениях фрагментов координатными плоскостями  $zy$  и  $xz$ . При этом уравнения зазоров между поверхностями фрагментов можно представить в следующем виде:

– в плоскости  $zy$

$$y = \frac{z^2}{2R_k}; \quad (5)$$

– в плоскости  $xz$

$$\Delta y = \frac{x^2}{2R_p} - \frac{x^2}{2R_{k1}}. \quad (6)$$

Если в уравнениях (5) и (6)  $y$  и  $\Delta y$  задать равными  $\delta_0$ ,  $x$  принимает значение размера полуоси контакта  $a$ , а  $z$  – значение полуоси  $b$ :

$$\delta_0 = \frac{b^2}{2R_k}; \quad (7)$$

$$\delta_0 = \frac{a^2}{2R_p} - \frac{a^2}{2R_{k1}}. \quad (8)$$

Приравняв правые части уравнений (7) и (8), получим соотношение между полуосями области контакта:

$$b = a \sqrt{R_k(1/R_p - 1/R_{k1})}.$$

Для того чтобы площадь определенной с помощью быстрого алгоритма области контакта равнялась полученной из решения методом конечных элементов, полуоси должны быть равны  $a = 21,3$  мм,  $b = 4,94$  мм. Внедрение при этом может быть определено из уравнений (7) или (8). Оно оказалось равным 0,0257 мм. Для второго варианта получен коэффициент внедрения поверхностей 0,504.

В третьем варианте рассмотрен случай, когда контакт расположен на галтельных участках поверхностей колеса и рельса так, что нормаль, проведенная из точки начального контакта, наклонена под углом  $45^\circ$  к оси колеса. Конечноэлементные схемы фрагментов колеса 1 и рельса 2, прилегающих к области контакта, показаны на рис. 5а. Ось  $y$  направлена вдоль общей нормали к поверхностям, проходящей через точку начального контакта. Плоскость  $yz$  является главной. Она наклонена к оси колеса под углом  $45^\circ$ . Радиус кривизны поверхности колеса в этой плоскости принят равным 672 мм. Его изменением на ширине контакта можно пренебречь вследствие малых размеров контактного пятна. Для профилей галтельных участков колеса и рельса заданы радиусы  $R_{k1} = 15,14$  мм и  $R_p = 15$  мм. Длины рёбер конечных элементов в области контакта приняты равными 0,5 мм.

Как и во втором варианте, нагружение фрагментов задавалось путём смещения верхней грани фрагмента 1 вдоль оси  $y$ . При смещении  $\delta$ , равном 0,055 мм, получена нормальная сила в контакте 100 кН. Распределение нормальных давлений на поверхности контакта показано на рис. 5б. Максимальное давление составило 818 МПа. Приблизённо оценены полуширина контакта  $b = 5,7$  мм и проекция полудлины на ось  $x$   $a_x = 9,55$  мм. Дана оценка проекции пятна контакта на координатную плоскость  $xz$  в предположении, что по форме она близка к эллипсу:  $F = \pi a_x b = 171 \text{ мм}^2$ .

При применении быстрого алгоритма для окружностей, которые получены в сечениях контактных поверхностей главными плоскостями, использованы уравнения без введения упрощений. Уравнения зазоров между поверхностями записываются в следующем виде:

– в главной плоскости  $yz$

$$y = R_k - \sqrt{R_k^2 - z^2}; \quad (9)$$

– в главной плоскости  $xu$

$$\Delta y = R_p - R_{k1} - \sqrt{R_p^2 - x^2} + \sqrt{R_{k1}^2 - x^2}. \quad (10)$$

Положим  $y$  и  $\Delta y$  равными  $\delta_0$ . Тогда в уравнениях (9) и (10)  $x$  принимает значение  $a$ , а  $z$  – значение  $b$ . Приравняв их правые части, получим

$$b^2 = R_k^2 - [R_k + R_{k1} - R_p + \sqrt{R_p^2 - a^2} - \sqrt{R_{k1}^2 - a^2}]^2.$$

Для того чтобы проекция области контакта на плоскость  $xz$  равнялась 171 мм<sup>2</sup>, величины  $a_x$  и  $b$  должны быть равны 8,56 и 6,36 мм соответственно. Тогда из уравнения (9) определяется внедрение  $\delta_0 = 0,03$  мм. При решении задачи методом конечных элементов внедрение задавалось равным 0,055 мм. Получен коэффициент внедрения для третьего варианта 0,545.

Итак, определены значения коэффициентов внедрения поверхностей колеса и рельса, используемых при решении нормальной контактной задачи с применением быстрого алгоритма. Если пространственный характер пятна контакта не сильно выражен, он может быть приведен к эквивалентному герцевскому. Коэффициент внедрения в этом случае зависит от соотношения полуосей эллипса и меняется от 0,5 до 0,47. Для случая, когда отношение полуосей составляет 6,5 и область контакта представляет пространственную поверхность, получен коэффициент внедрения 0,504.

При расположении контакта на галтельных участках колеса и рельса поверхность области контакта носит явно выраженный пространственный характер. Для этого случая получено значение коэффициента внедрения 0,545.

Для рассмотренных вариантов контакта колеса и рельса разброс значений коэффициента внедрения небольшой, что позволяет при использовании быстрого алгоритма решения контактных задач принимать его среднее значение 0,5.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kik, W. A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling / W. Kik, J. Piotrowski // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – Budapest, 1996. – P. 52-61.
2. Linder, C. Prediction of wheel wear / C. Linder, H. Brauchli // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – Budapest, 1996. – P. 215-223.
3. Kalker, J.J. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact / J.J. Kalker. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer academic publishers, 1990. – 314 p.
4. Harder, R.F. Generalized approximations of wheel-rail creep forces and contact patch frictional work using neural network simulation / R.F. Harder, L.L. Meekisho, J. Jones, V. Rhoades // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – Budapest, 1996. – P. 21-33.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1980. – 510 с.

Материал поступил в редколлегию 1.12.14.