

В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, В.В. Нижник

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В УЗКОМ ДВУХМЕРНОМ КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ СТЕНКОЙ<sup>1</sup>

Рассмотрена математическая модель теплопереноса в узких каналах с движущимися шероховатыми стенками в двухмерной постановке. Представлены результаты сравнения коэффициента потока и числа Нуссельта для канала с гладкими стенками и каналов с шероховатостями с естественными законами распределения. Исследованы как статический, так и динамический случаи.

Ключевые слова: узкий канал, шероховатость поверхности, поток жидкости, теплообмен, движущиеся стенки.

Изучение течения жидких и газовых сред, а также связанного с ним теплообмена в узких каналах различных технологических устройств на протяжении многих лет остается одной из главных проблем прикладной механики. Рассматриваемые виды течений актуальны при анализе эффективности компактных теплообменников, изучении тепловых потоков в частях механизмов и т.д.

Режимы течения и теплообмена в узких каналах отличаются от аналогичных процессов, протекающих в каналах большого размера. Одним из главных факторов, оказывающих решающее влияние на характер течения и показатели теплообмена в таких каналах, становится шероховатость поверхности. Более того, одним из традиционных способов увеличения эффективности теплообмена в узких каналах и каналах большого размера (в особенности для турбулентного потока) является нанесение искусственно созданных неровностей регулярной формы на их стенки.

В одной из предыдущих работ [1] авторским коллективом предложена численная модель течения и теплообмена в узких каналах с учетом шероховатости их стенок в приближении смазочного слоя. Настоящая работа является попыткой расширить данную численную модель с целью анализа тепловых потоков в узких каналах с шероховатой движущейся стенкой. Такая модель позволит исследовать влияние шероховатости стенки канала как на статическую, так и на динамическую составляющие потока.

**Постановка задачи.** В основе численной модели лежит двухмерная геометрическая модель узкого канала с учётом шероховатостей его стенок  $h_1$  и  $h_2$  (рис. 1). Средний зазор  $H$  между двумя поверхностями вычисляется как расстояние между их средними линиями. Верхняя и нижняя стенки канала определяются как  $H_1(x) = H + h_1(x)$  и  $H_2(x) = H + h_2(x)$ , а текущий зазор – как  $h_T(x) = H + h_1(x) + h_2(x)$ . Верхняя стенка канала движется параллельно нижней стенке с постоянной скоростью  $U$ .

В расчётах могут быть использованы как реальные технологические поверхности, так и искусственно сгенерированные поверхности с заданными свойствами. Неровности поверхности канала задаются на регулярной сетке с шагом  $\Delta x$ . Шаг вычислительной сетки в направлении оси  $x$  задаётся кратно исходному шагу профиля неровностей  $\Delta x = k \delta x$  ( $k$  – целое). Шаг  $\Delta y$  в направлении оси  $y$  должен быть сопоставим по величине с  $\Delta x$ .

Для моделирования течения в узком канале используется приближение смазочного слоя, которое определяется системой уравнений, предложенной О. Рейнольдсом. Для трёхмерного случая она имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h_T^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h_T^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U \frac{\partial h_T}{\partial x}, \quad v_z = 0,$$

<sup>1</sup>Исследования проведены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации для учреждений высшего профессионального образования в рамках базовой части государственного задания.

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(1 - h_r) + U \left(1 - \frac{z}{h_r}\right), \quad v_y = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(z - h_r),$$

где  $p$  – давление среды;  $v$  – локальная скорость среды;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

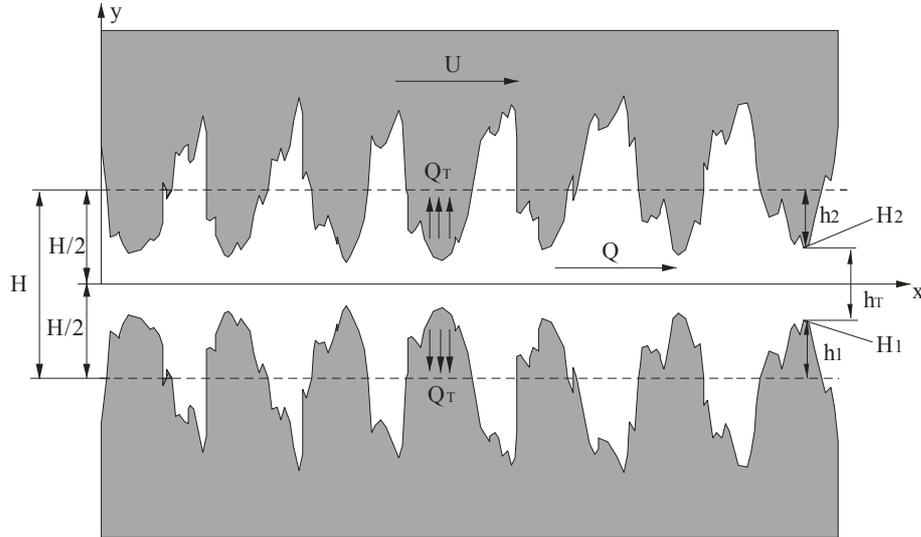


Рис. 1. Двухмерная модель канала с движущейся шероховатой стенкой

Для двухмерного случая система уравнений Рейнольдса значительно упрощается и может быть решена аналитически [2]:

$$p(x) = p_{in} + 6\mu U \int_0^x \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)} + \frac{p_{out} - p_{in} - 6\mu U \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)}}{\int_0^L \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)}} \int_0^x \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu U}{h_r^2(\xi)} + \frac{p_{out} - p_{in} - 6\mu U \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)}}{h_r^2(x) \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_r^2(\xi)}},$$

где  $p_{in}$  – давление на входе в канал;  $p_{out}$  – давление на выходе канала (граничные условия).

Для моделирования связанного с потоком теплопереноса обычно используется уравнение баланса энергии:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta(T) + \mu \Phi, \quad (1)$$

где  $T$  – температура среды;  $\rho$  – плотность среды;  $C_p$  – теплоёмкость среды;  $\lambda$  – теплопроводность среды;  $t$  – время;  $\Phi$  – диссипативная функция. Процесс диссипации не является определяющим для описанной задачи, поэтому компонента  $\Phi$  была опущена в рассматриваемой модели.

Поток в двухмерном узком канале направлен вдоль оси. Таким образом, можно положить  $v_y = 0$ . Так как процесс стационарен, то полная производная от температуры примет вид

$$\frac{dT}{dt} = v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} = v_x \frac{dT}{dx}.$$

Тепло в двухмерном узком канале распространяется вдоль оси  $Oy$  от стенок канала к середине потока. Поэтому производной  $d^2T/dx^2$  в операторе Лапласа можно пренебречь. В итоге уравнение баланса энергии примет вид

$$\rho C_p v_x \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda d^2T}{dy^2}. \quad (2)$$

Уравнение (2) является упрощённым вариантом уравнения (1), по-прежнему учитывающим основные особенности процесса.

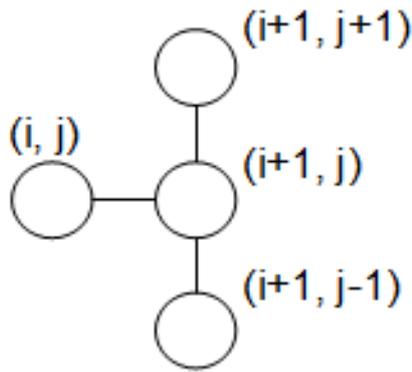


Рис. 2. Шаблон неявного конечноразностного метода для уравнения баланса энергии

Для решения дифференциального уравнения (2) необходимо задать температуру на стенках канала  $T_w$  и температуру входного потока  $T_{in}$ . При таких граничных условиях уравнение можно решить, используя неявный конечноразностный метод. Шаблон данного метода представлен на рис. 2.

В соответствии с неявной конечноразностной схемой производные температуры аппроксимируются следующими конечными разностями:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x},$$

$$\frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}.$$

Таким образом, уравнение (2) заменяется следующим конечноразностным соотношением:

$$\rho C_p [v_x]_{i,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x} = \lambda \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j+1}}{\delta y^2}, \tag{3}$$

Для решения соотношения (3) может быть использован метод прогонки. Данная схема абсолютно устойчива и сходится. Погрешность схемы линейна относительно и квадратична относительно.

**Расчёт характеристик потока.** Для оценки величины расхода в узком канале с шероховатыми стенками и сопряженного теплопереноса были использованы безразмерные характеристики – коэффициент потока и число Нуссельта. Безразмерные коэффициенты  $\varphi_x$  и  $\theta_x$  показывают, насколько уменьшается величина расхода в канале с шероховатыми стенками по сравнению с каналом с гладкими стенками:

$$Q_x^* = \frac{BH^3(p_{out} - p_{in})}{12\mu L} + \frac{BUH}{2}, \tag{4}$$

где  $B$  – ширина канала.

Как видно из уравнения (4), поток является алгебраической суммой двух компонент. Первая часть потока – статическая, вызванная перепадом давлений на входе и выходе канала. Вторая компонента – динамическая, обусловленная движением стенки канала. Поэтому для оценки потока в канале следует рассчитывать два независимых коэффициента.

Статический коэффициент потока  $\varphi_x$  вычисляют с учётом только статической части потока, не принимая во внимание движение стенки канала ( $U = 0$ ):

$$Q_{xs} = \frac{Bh_\tau(L)^3 \partial p}{12\mu \partial x} \Big|_{x=L} = \frac{B(p_{out} - p_{in})}{12\mu \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_\tau^3(\xi)}},$$

$$Q_{xs}^* = -\frac{BH^3(p_{out} - p_{in})}{12\mu L}, \quad \varphi_x = Q_{xs}/Q_{xs}^*$$

Динамический коэффициент потока  $\theta_x$  вычисляют, учитывая только динамическую часть потока и не принимая во внимание перепад давлений на входе и выходе канала:

$$Q_{xd} = BU \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_\tau^2(\xi)} / 2 \int_0^L \frac{\partial \xi}{h_\tau^3(\xi)},$$

$$Q_{xd}^* = \frac{BUH}{2}, \quad \theta_x = Q_{xd}/Q_{xd}^*$$

Предложенные коэффициенты потока позволяют сконцентрироваться в первую очередь на зависимости свойств потока от геометрических свойств шероховатости поверхно-

сти канала и величины среднего зазора в канале, а не от скорости стенки, разницы давлений, значения вязкости и т.д.

Число Нуссельта является отношением конвективной части теплообмена к теплопроводности по нормали к границе. Теплопроводность измеряется так же, как и конвекция, но в установившемся потоке. В рассматриваемом течении этот безразмерный коэффициент показывает эффективность геометрии канала с точки зрения управления потоком тепла путём изменения перепада давлений или скорости стенки.

Для полностью развитого ламинарного течения число Нуссельта вычисляется для каждого поперечного сечения ( $x = Const$ ) следующим образом [3]:

$$Nu = \frac{\alpha D_h}{\lambda},$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $D_h$  – гидравлический диаметр.

Гидравлический диаметр канала для каждого сечения вычисляется по формуле

$$D_h = \frac{4A_c}{P} = \frac{4BH}{2B + 2H} = \frac{2BH}{B + H},$$

где  $A_c$  – площадь поперечного сечения;  $P$  – его смоченный периметр.

Коэффициент теплоотдачи в заданном сечении канала вычисляется как

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_m},$$

где  $q$  – нормальный тепловой поток вблизи стенок канала;  $T_m$  – характерная температура потока в сечении.

Нормальный тепловой поток вблизи стенок может быть вычислен без учёта влияния шероховатости:

$$q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Характерная температура потока может быть вычислена путем усреднения поля температуры относительно скорости потока:

$$T_m(x) = \frac{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) T(y) dy}{\int_{H_1(x)}^{H_2(x)} v_x(y) dy}.$$

Итоговое число Нуссельта, характерное для данного потока, вычисляется как среднее от чисел Нуссельта, рассчитанных по всем сечениям, за исключением зоны развивающегося потока в области вхождения. Свои различающиеся числа Нуссельта могут быть вычислены независимо для статических и динамических граничных условий.

**Численное моделирование.** Для проверки предложенной численной модели и вычислительной программы были проведено численное моделирование исследованного многими авторами течения в канале с гладкими стенками [4]. В принятой модели поток является гидродинамически развитым с самого начала канала, а скорость имеет параболическую форму в поперечном сечении. Режим теплового потока в области вхождения представляет собой развивающийся процесс. При этом график температуры в поперечном сечении представляет собой сплюснутую параболу. В зоне термально развитого течения график поперечного сечения поля температуры имеет строго параболическую форму. Результаты численных расчетов полностью согласуются с предполагаемым теоретическим поведением потока. Развитие теплового потока в канале с гладкими движущимися стенками представлено на рис. 3.

Квазипараболическое распределение температуры было получено для внутренней области канала (рис. 3 б). Пик температуры смещён в сторону движущейся стенки, что связано с увеличением скорости потока в этой области по сравнению с его скоростью возле неподвижной стенки. В области вхождения потока сечение поля температуры постепенно развивается от заданной на границе формы к квазипараболической. Полученные для

случая с гладкими стенками результаты подтверждают правильность предложенной численной модели и расчётов.

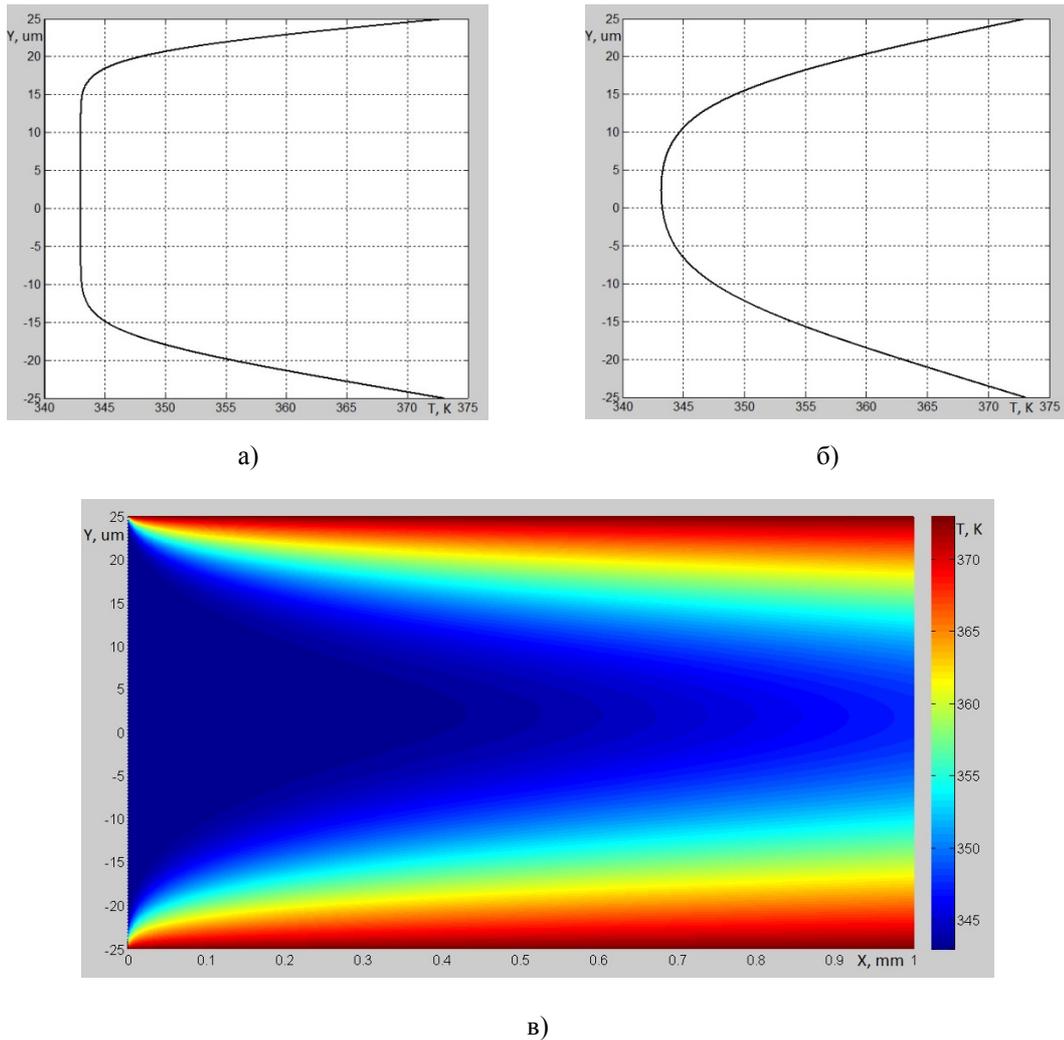


Рис. 3 Распределение температуры в канале с гладкими подвижными стенками: а – сечение поля температуры в области вхождения; б – сечение поля температуры в центральной области; в – поле температуры

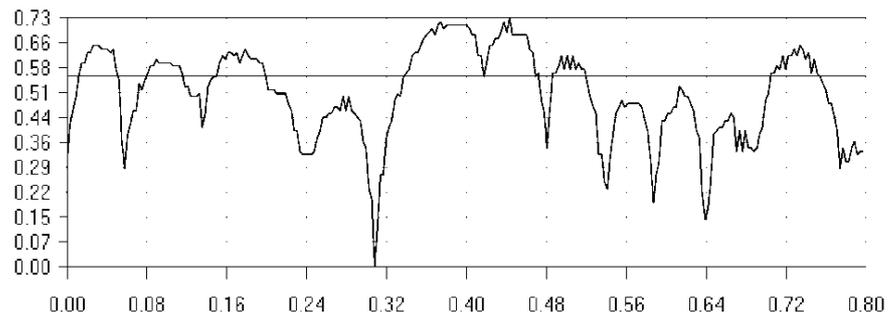
Другие численные эксперименты были проведены для каналов с шероховатыми стенками. В качестве геометрии стенок канала использовались результаты измерения реальных поверхностей после полирования, шлифования, фрезерования и токарной обработки. Выбор методов обработки поверхности канала обусловлен возможностью оценки влияния на величину теплового потока высоты неровностей в широком диапазоне значений. Длина исследуемого канала – 0,8 мм, что соответствует базовой длине для оценки параметров шероховатости. Используемые для численных расчетов профили шероховатостей показаны на рис. 4.

Эксперименты были проведены для  $h = 40$  мкм,  $p_A = 10$  кПа,  $p_B = 0$ ,  $U = 200$  м/с,  $T_{in} = 343$  К,  $T_w = 373$  К. Характерные поля температур для задачи со статическими граничными условиями показаны на рис. 5. Характерные поля температур для задачи с динамическими граничными условиями показаны на рис. 6.

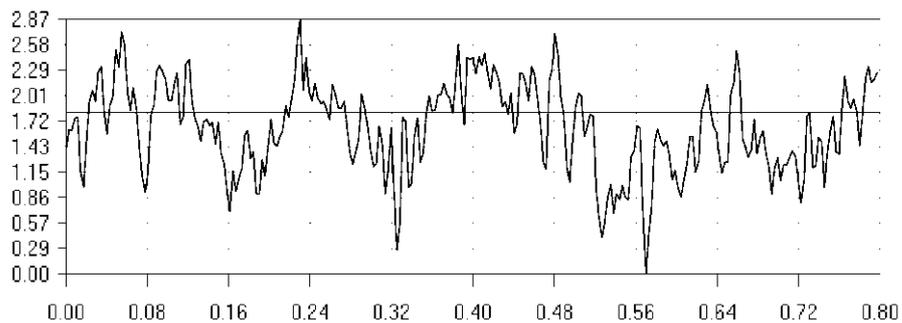
Графики поперечного сечения полей температур имеют квазипараболическую форму, как и в случае гладкого канала. Тепловой поток является развивающимся в области вхождения. Теплоперенос более интенсивен для тех шероховатостей стенок канала, которые имеют большую высоту выступов.

Расчётные зависимости числа Нуссельта от ширины канала при различных видах шероховатости стенки показаны на рис. 7 и 8. На первом графике представлены результа-

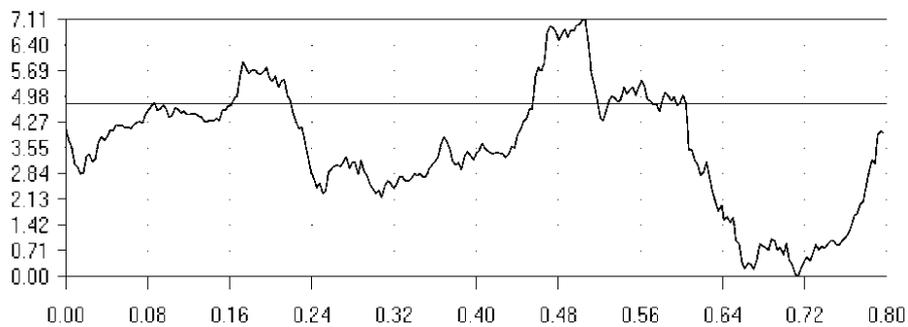
ты для статических, а на втором – для динамических граничных условий. Средний зазор в обоих случаях варьировался от 40 до 80 нм.



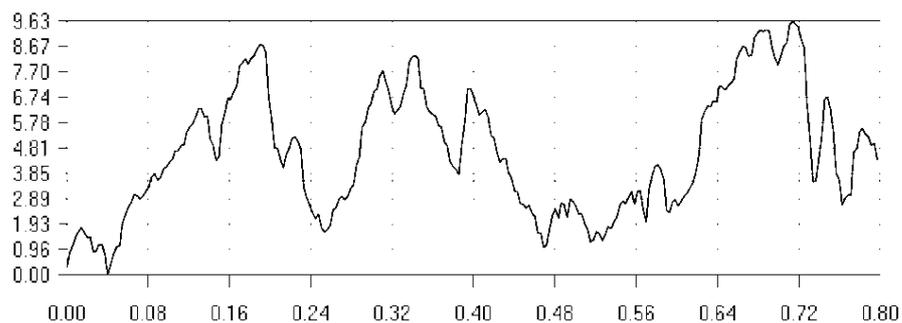
а)



б)



в)



г)

Рис. 4. Профили неровностей поверхностей: а – после полирования; б – после шлифования; в – после торцевого фрезерования; г – после токарной обработки

Число Нуссельта растёт при увеличении среднего зазора, так как растёт и число Рейнольдса. Это соответствует известным теоретическим предположениям и совпадает с экспериментальными данными для каналов больших размеров.

Как для статических, так и для динамических краевых условий разница между числами Нуссельта при различных шероховатостях стенок увеличивается вместе с увеличе-

нием среднего зазора. Чем больше размеры шероховатости, тем сильнее число Нуссельта отличается от числа Нуссельта для гладкого канала. В каналах с малыми величинами среднего зазора эта разница менее заметна.

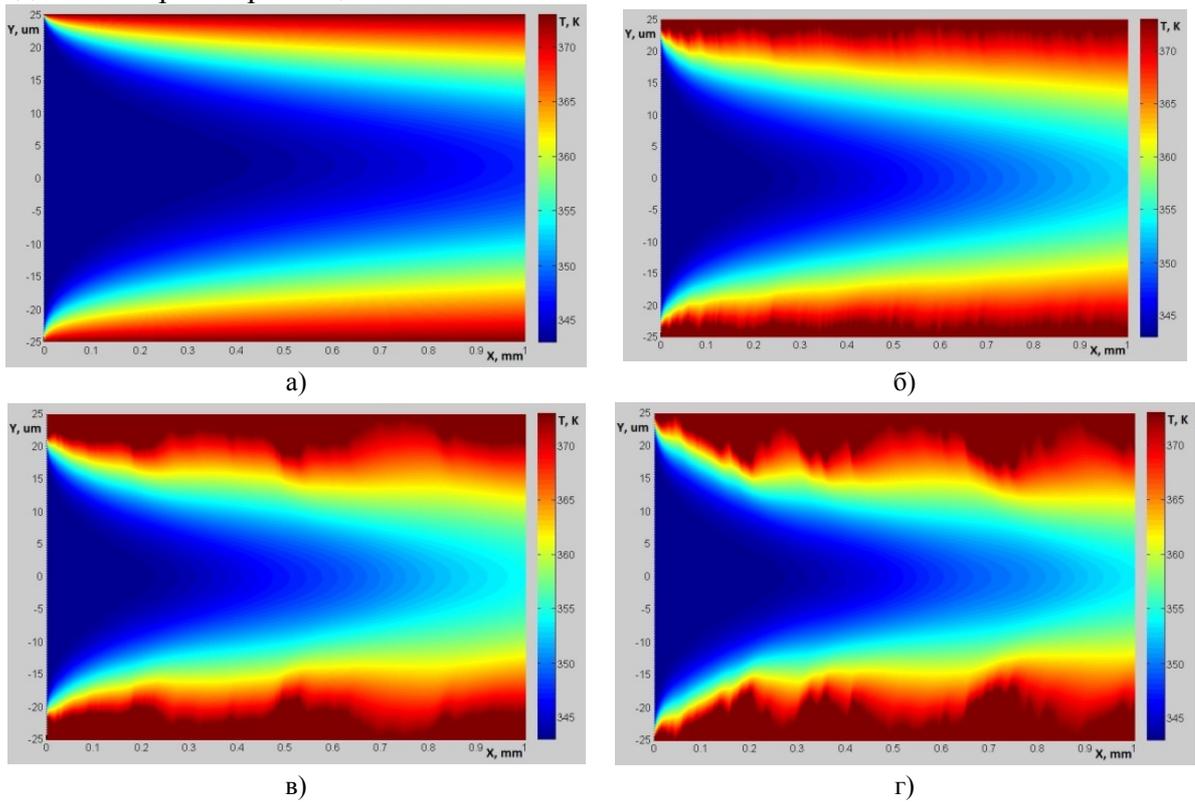


Рис. 5. Поля температур в канале с шероховатыми стенками и статическими граничными условиями: а – после полирования; б – после шлифования; в – после фрезерования; г – после токарной обработки

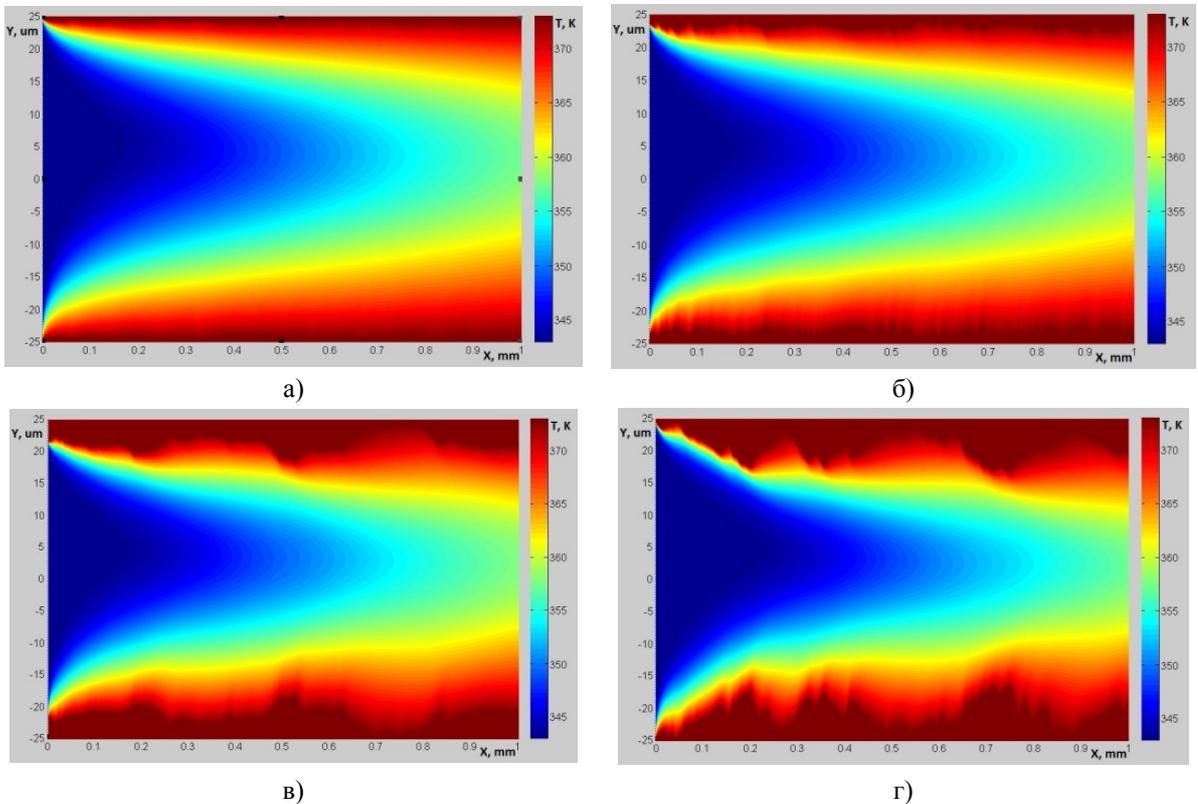


Рис. 6. Поля температур в канале с шероховатыми стенками и динамическими граничными условиями: а – после полирования; б – после шлифования; в – после фрезерования; г – после токарной обработки

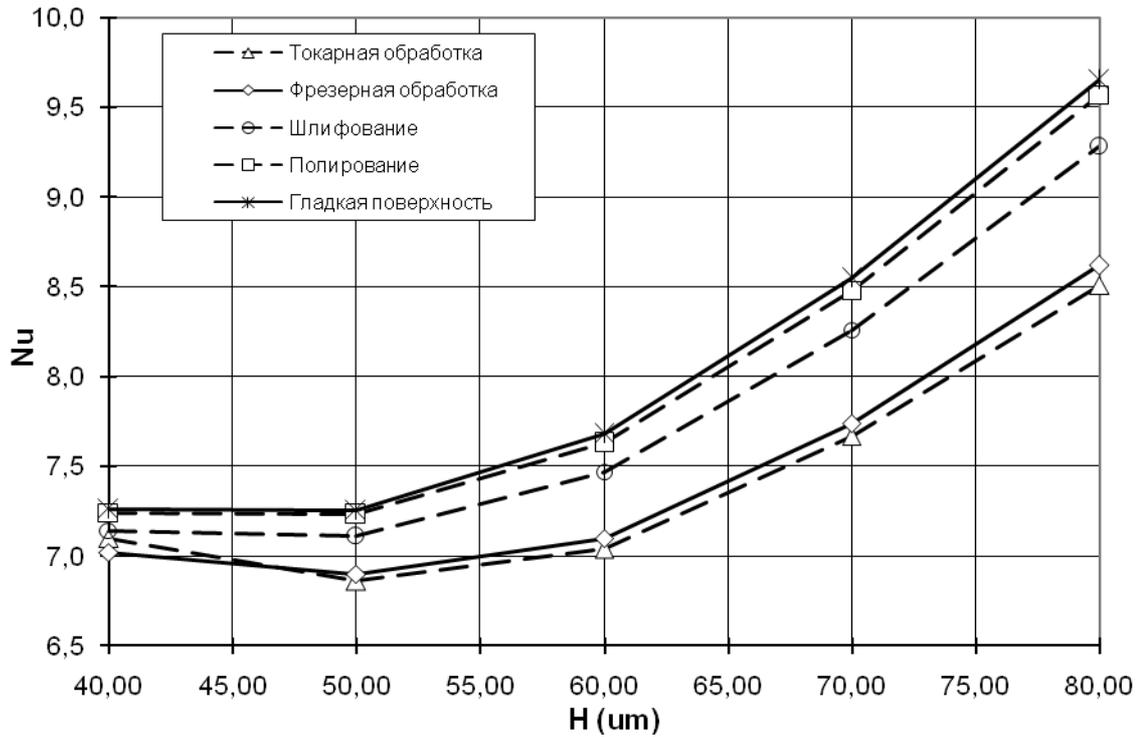


Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта от ширины канала для статической краевой задачи

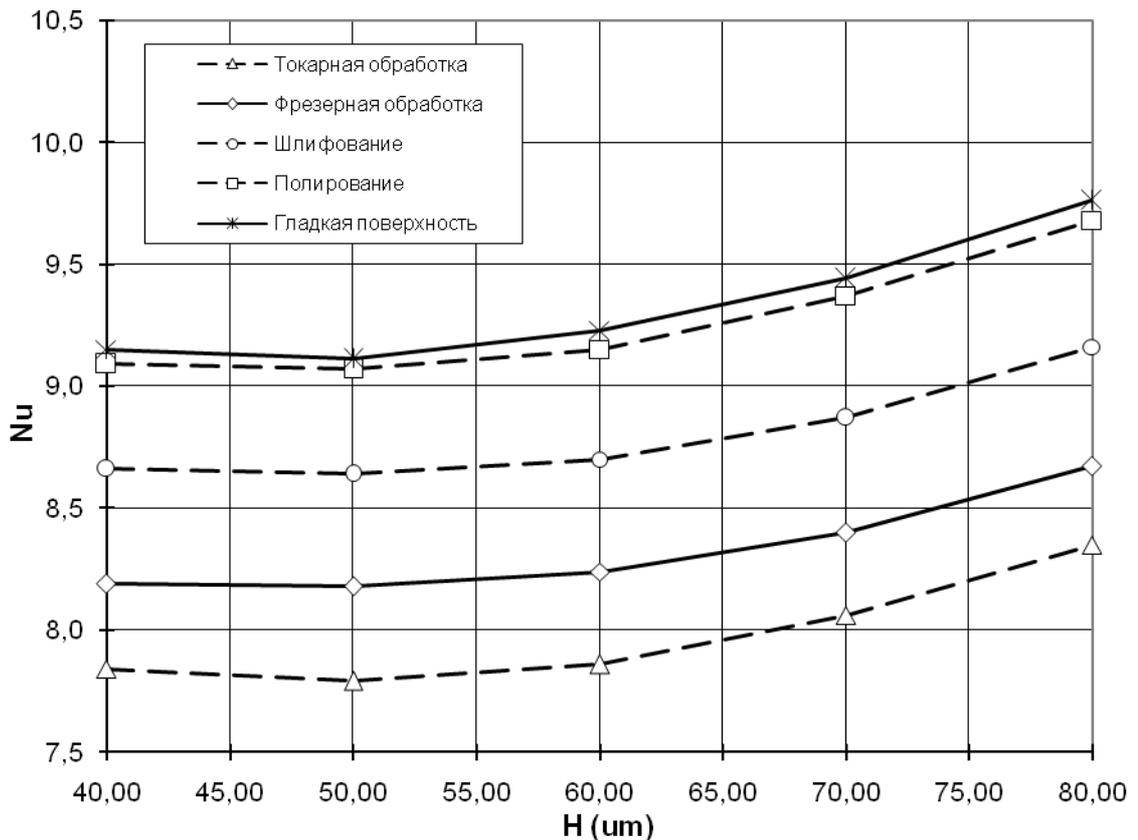


Рис. 8. Зависимость числа Нуссельта от ширины канала для динамической краевой задачи

В случае статической краевой задачи взвешенное по скорости значение температуры близко к температуре в центральном слое потока, так как значение скорости максимально в этой области и быстро убывает при приближении к стенкам. Поэтому слои потока в середине канала имеют наибольшее влияние на число Нуссельта. В случае динамической

краевой задачи поля течения и температуры сильно смещены в область, прилежащую к движущейся стенке, где слои намного интенсивней участвуют в теплообмене. Графики числа Нуссельта при динамических граничных условиях для различных шероховатостей стенки канала выглядят почти параллельными. Это неожиданный факт, и он требует дальнейшего подробного рассмотрения.

Предложенная математическая модель позволяет рассчитать течение и теплообмен в двухмерном канале с шероховатыми движущимися стенками. Это может быть полезно при выборе наиболее подходящей поверхности канала для увеличения эффективности теплообмена на стадии проектирования.

Численные эксперименты показывают, что шероховатость стенок канала имеет значительное влияние на поток тепла. Для статических граничных условий числа Нуссельта для канала с шероховатыми стенками все сильнее расходятся с числами Нуссельта, посчитанными в канале с гладкими стенками, с увеличением среднего зазора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов, Д.Ю. Математическая модель течения и теплообмена в узком канале с шероховатыми стенками / Д.Ю. Богомолов, А.В. Онанко, В.В. Порошин, В.Ю. Радыгин // *Машиностроение и инженерное образование*. – 2013. – №3 (36). – С. 52 – 59.
2. Шейпак, А.А. Моделирование течения в подвижных соединениях с шероховатыми стенками на основе вычисления эквивалентного зазора / А.А. Шейпак, В.В. Порошин, Д.Ю. Богомолов, А.А. Сыромятникова // *Сборник трудов XV Международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века»*, 15-20 сент. 2008г. – Севастополь. – С. 23 – 27.
3. Rohsenow, Warren M. *Handbook Of Heat Transfer* / Warren M. Rohsenow, James R. Hartnett, Young I. Cho // MCGRAW-HILL. – 1998.
4. Mills, A.F. *Heat Transfer* / A.F. Mills. – 2nd ed. – Prentice Hall; Upper Saddle River; New Jersey.

Материал поступил в редколлегию 4.08.14.