УДК 621.865.8

О.Н. Крахмалев, Д.М. Медведев, Д.И. Петрешин

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

Предложен метод оптимизации законов движения манипуляционных роботов, основанный на анализе инерционных факторов, определяющих возникающие при движении роботов силы инерции.

Ключевые слова: манипуляционные роботы, моделирование динамики, оптимизация, законы движения, силы инерции.

Проведенные исследования показывают, что нагрузка на приводы манипуляционных роботов, используемых в промышленности, определяется главным образом силами инерции. Рассматриваемый в статье метод позволяет проводить анализ влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов и может быть эффективно применён при оптимизации их законов движения на стадии проектирования робототехнологических комплексов. Применение данного метода оптимизации при проектировании робототехнологических комплексов будет способствовать повышению производительности труда в роботизированном производстве за счёт повышения быстродействия роботов и снижения энергоёмкости процессов манипулирования [1– 3].

Предлагаемый метод основывается на методе Лагранжа – Эйлера, реализованном с применением аппарата матриц преобразования однородных координат, и методике анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов [4]. Такой подход позволил получить аналитические выражения в удобном для моделирования динамики манипуляционных роботов виде. Для исследования динамики манипуляционных роботов будем использовать математическую модель, основанную на матричном уравнении [5]

$$[M]\{\ddot{q}\}+[S]\{\dot{q}^2\}+2[K]\left\{\begin{matrix}\dot{q}_i\dot{q}_j\\ i\neq j\end{matrix}\right\}=\{Q\}, \tag{1}$$

где $\{\ddot{q}\}=[\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,...,\ddot{q}_n]^T$ – вектор ускорений обобщённых координат, n – число степеней свободы манипуляционной системы; $\{\dot{q}^2\}=\left[\dot{q}_1{}^2,\dot{q}_2{}^2,...,\dot{q}_n{}^2\right]^T$ – вектор квадратов скоростей обобщённых координат;

$\left\{\begin{matrix}\dot{q}_i\dot{q}_j\\ i\neq j\end{matrix}\right\}=[\dot{q}_1\dot{q}_2,\dot{q}_1\dot{q}_3,...,\dot{q}_1\dot{q}_n,\dot{q}_2\dot{q}_3,...,\dot{q}_2\dot{q}_n,\dot{q}_3\dot{q}_4,...,\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]^T$ – вектор $C_n^2\times 1$ попарных произведений обобщённых скоростей, C_n^2 – число сочетаний из n по 2; $\{Q\}$ – вектор $n\times 1$ обобщенных сил [6].

$[M]$ – симметрическая матрица размерности $n\times n$, определяющая влияние даламберовых сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[M]$ можно представить суммой матриц:

$$[M]=\sum_{k=1}^{n}[m_{ijk}],\; m_{ijk}=tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial A^T{}_{0,k}}{\partial q_j}\right)\quad (i,j=(1,...,n)). \tag{2}$$

$[S]$ – матрица размерности $n\times n$, определяющая влияние центробежных сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[S]$ можно представить суммой матриц:

$$[S]=\sum_{k=1}^{n}[s_{ijk}],\ s_{ijk}=tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial^2 A^T{}_{0,k}}{\partial q_j^2}\right)\quad (i,j=(1,...,n)). \tag{3}$$

[K] – матрица размерности $n\times C_n^2$, определяющая влияние кориолисовых сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу [K] также можно представить суммой матриц:

$$[K]=\sum_{k=2}^{n}[k_{ijk}],\ k_{ijk}=tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial^2 A^T{}_{0,k}}{\partial q_i\partial q_j}\right)\quad (i,j=(1,...,n)). \tag{4}$$

H_k – матрица 4×4 инерции k-го звена манипуляционной системы, рассматриваемого как твёрдое тело. $A_{0,k}$ – матрица 4×4 преобразования однородных координат из системы координат, связанной с k-м звеном, в неподвижную систему координат, связанную с основанием робота.

Анализ влияния сил инерции на усилия, развиваемые приводами манипуляционных систем, может быть проведен путём анализа ненулевых элементов матричных коэффициентов (2–4) уравнения (1). Элементы матричных коэффициентов [M], [S] и [K] являются функциями обобщённых координат, поэтому (по теореме о необходимых условиях экстремума функции многих переменных) для элементов матричных коэффициентов m_{ij}, s_{ij} и k_{ih} в точках экстремума $q_i = q_i^*$ $i=(1,\dots,n)$ должны выполняться условия:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s}(q_1^*,...,q_n^*)=0,\quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial q_s}(q_1^*,...,q_n^*)=0,\quad \frac{\partial k_{ih}}{\partial q_s}(q_1^*,...,q_n^*)=0\quad (s=(1,...,n)). \tag{5}$$

Аналитические выражения для частных производных матричных коэффициентов, составляющих уравнения (5), имеют следующий вид:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j\partial q_s}+\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j}H_k\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i\partial q_s}\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2\partial q_s}+\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2}H_k\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i\partial q_s}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}tr\left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l\partial q_t\partial q_s}+\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_l\partial q_t}H_k\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i\partial q_s}\right). \tag{8}$$

Для поиска экстремумов ненулевых элементов матричных коэффициентов m_{ij}, s_{ij} и k_{ih} и решения уравнений (5) могут быть использованы численные методы, например метод Ньютона для безусловной минимизации функции многих переменных. Полагаем, что функция $f(x_1,\dots, x_n)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности своего минимума $f_{min}= f(x_1^*,\dots, x_n^*)$. Алгоритм поиска экстремумов на k-м шаге итерации может иметь вид

$$\frac{\partial^2 f\left(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}\right)}{\partial x^2}\left\{\Delta x^{(k)}\right\}=-\frac{\partial f\left(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}\right)}{\partial x},\quad \left\{x^{(k+1)}\right\}=\left\{x^{(k)}\right\}+\left\{\Delta x^{(k)}\right\}, \tag{9}$$

где $\{\Delta x^{(k)}\}$ – вектор $n\times 1$ разности промежуточных решений.

Помимо необходимых условий экстремума (5), по теореме о достаточности условия экстремума функции многих переменных требуется, чтобы наименьший не равный нулю дифференциал, начиная со второго, элементов m_{ij}, s_{ij} и k_{ih} в точках экстремума был знакоопределённой величиной, т.е. был положительно определён в точке минимума и отрицательно определён в точке максимума.

Для проверки условия достаточности экстремума в точке $\left(q_1^*,...,q_n^*\right)$ исследуются квадратичные формы соответствующих функций: m_{ij}, s_{ij} и k_{ih}, i,j=(1,…,n), h=(1,…,C_n^2). В нашем случае будем иметь:

$$\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2 m_{ij}(q_1^*,...,q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q}dq_p dq_q = \\ = \sum_{k,p,q=1}^{n} tr\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p \partial q_q}+\dfrac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q}+ \\ +\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p}H_k\dfrac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_q}+\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q}H_k\dfrac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p}\end{array}\right)dq_p dq_q, \qquad (10)$$

$$\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2 s_{ij}(q_1^*,...,q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q}dq_p dq_q = \\ = \sum_{k,p,q=1}^{n} tr\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\dfrac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p \partial q_q}+\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q}+ \\ +\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_q}+\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p}\end{array}\right)dq_p dq_q, \qquad (11)$$

$$\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2 k_{ih}(q_1^*,...,q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q}dq_p dq_q = \\ = \sum_{k,p,q=1}^{n} tr\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i}H_k\dfrac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t \partial q_p \partial q_q}+\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_l \partial q_t}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q}+ \\ +\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t \partial q_q}+\dfrac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q}H_k\dfrac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t \partial q_p}\end{array}\right)dq_p dq_q. \qquad (12)$$

Найденные на основе выражений (5–12) экстремумы ненулевых элементов матричных коэффициентов уравнения (1) задают соответствующие им точки в пространстве обобщённых координат. Используя эти точки, по методу наименьших квадратов можно выполнить оптимизацию траектории движения манипуляционного робота. По полученной траектории на основе пространственно-временных условий определяется оптимальный закон движения.

Отметим, что предложенный метод может быть использован также при моделировании динамики и оптимизации движения кранов-манипуляторов различной конструкции [7–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федонин, О.Н. Модернизация металлообрабатывающих станков, применяемых в условиях автоматизированного производства / О.Н. Федонин, Д.И. Петрешин, В.А. Хандожко, А.В. Агеенко // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2009. – №3. – С. 57–59.
2. Финатов, Д.Н. Механосборочный робототехнологический комплекс / Д.Н. Финатов, Д.И. Петрешин, Г.В. Горячев // Обработка металлов: технология, оборудование, инструменты. – 2003. – №1. – С. 4–6.
3. Петрешин, Д.И. Расширение функциональных возможностей металлорежущих станков с ЧПУ путем организации связи между ПЭВМ и УЧПУ при построении адаптивной системы управления / Д.И.

Петрешин, О.Н. Федонин, В.П. Федоров, А.В. Хандожко, В.А. Хандожко // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. –№4. –С.4–9.

4. Крахмалев, О.Н. Методика анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов / О.Н. Крахмалев // Теория механизмов и машин. – 2012. – №20. –Т. 10. – С. 41–53.
5. Крахмалев, О.Н. Исследование малых отклонений от программных движений манипуляционных систем с упругой податливостью, сосредоточенной в сочленениях звеньев / О.Н. Крахмалев // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. –№4. –С.39–46.
6. Крахмалев, О.Н. Моделирование обобщенных сил, действующих на звенья манипуляционных систем / О.Н. Крахмалев, А.П. Болдырев // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. –№1. –С.115–121.
7. Крахмалев, О.Н. Математическое моделирование динамики манипуляционных систем промышленных роботов и кранов-манипуляторов: монография / О.Н. Крахмалев. – Брянск: БГТУ, 2012. –200 с.
8. Лагерев, И.А. Динамика трёхзвенных кранов-манипуляторов: монография / И.А. Лагерев, А.В. Лагерев. – Брянск: БГТУ, 2012.
9. Лагерев, А.В. Универсальная методика динамического анализа кранов-манипуляторов / А.В. Лагерев, А.А. Мильто, И.А. Лагерев // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2013. –№3. –С.24–31.
10. Реутов, А.А. Расчет усилий механизма выдвижения телескопической стрелы / А.А. Реутов // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2013. –№3. –С.41–45.

Материал поступил в редколлегию 23.01.14.