

Научная статья

Статья в открытом доступе

УДК 519.711

doi: 10.30987/2658-6436-2026-1-39-48

РАСКРАШЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ С МНОГОЦВЕТНЫМИ МЕТКАМИ

Ирина Александровна Седых¹, Александр Андреевич Тамбовцев²

^{1,2} Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

¹ sedykh-irina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0012-8103>

² sasha.tambovtsev.585@mail.ru

Аннотация. *Описана разработанная математическая модель – раскрашенная сеть Петри с многоцветными метками. Модификация данной сети Петри заключается в наличии в ней меток, содержащих одновременно несколько цветов, где каждый цвет представляет собой отдельный параметр или переменную. Предложен алгоритм функционирования раскрашенной сети Петри с многоцветными метками, являющийся модификацией алгоритма для обычной раскрашенной сети Петри. В рассматриваемой сети Петри матрицы инцидентности и маркировка являются блочными матрицами, при этом каждая метка в матрице маркировок представлена в виде вектор-столбца. Отличие от обычных раскрашенных сетей Петри заключается в том, что цвета в метке, не являющиеся разрешающими для срабатывающего перехода, будут сохранены в этой метке, а разрешающие цвета будут изменяться по правилам работы обычной раскрашенной сети Петри. Раскрашенные сети Петри с многоцветными метками могут использоваться при моделировании динамических систем, где требуется единовременная передача двух и более значений параметров при выполнении условий срабатывания перехода. Например, при моделировании работы склада и его внутренних процессов, для моделирования систем управления маршрутами Ж/Д или автотранспорта и др.*

Ключевые слова: динамические системы и процессы, сети Петри, раскрашенные сети Петри, многоцветные метки, алгоритм функционирования раскрашенной сети Петри с многоцветными метками

Для цитирования: Седых И.А., Тамбовцев А.А. Раскрашенные сети Петри с многоцветными метками // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2026. №1 (31). С. 39-48. doi: 10.30987/2658-6436-2026-1-39-48.

Original article

Open Access Article

COLORED PETRI NETS WITH MULTICOLOR MARKS

Irina A. Sedykh¹, Alexander A. Tambovtsev²

^{1,2} Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

¹ sedykh-irina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0012-8103>

² sasha.tambovtsev.585@mail.ru

Abstract. *This paper describes a developed mathematical model – a coloured Petri net with multicolour marks. This Petri net is modified by having marks containing multiple colours simultaneously, where each colour represents a separate parameter or variable. The work proposes an algorithm for operating a coloured Petri net with multicolour marks, which is a modification of the algorithm for a standard coloured Petri net. In this Petri net, the incidence matrices and markings are block matrices, with each mark in the marking matrix represented as a column vector. The difference from standard coloured Petri nets is that the colours in a label that are not permissive for the triggered transition will be stored in this label, while permissive colours will change according to the operating rules of a standard coloured Petri net. Coloured Petri nets with multi-colour labels can be used to model dynamic systems that require the simultaneous transmission of two or more parameter values when the transition trigger conditions are met for example, when modelling warehouse operations and their internal processes, or for modelling rail or truck route control systems, etc.*

Keywords: dynamic systems and processes, Petri nets, coloured Petri nets, multi-colour labels, algorithm for operating a coloured Petri net with multi-colour labels

For citation: Sedykh I.A., Tambovtsev A.A. Colored Petri Nets with Multicolor Marks. Automation and modeling in design and management, 2026, no. 1 (31). pp. 39-48. doi: 10.30987/2658-6436-2026-1-39-48.

Введение

Для изучения, анализа или проектирования динамических систем и процессов применяются различные математические модели. Примером таких моделей являются сети Петри. Они позволяют моделировать асинхронность и недетерминизм параллельных, независимых событий, параллелизм конвейерного типа, конфликтные ситуации между процессами. Их можно использовать для моделирования систем, которые состоят из множества взаимодействующих друг с другом компонентов. Например, для моделирования систем управления автотранспортом, для моделирования складских и других логистических процессов. Одной из особенностей сетей Петри является наглядность представления моделируемого процесса. Это отмечается во многих работах, где применяется моделирование на основе сетей Петри, например, в работе Луиса Сесара Маркеса Де Васконселоса «Генерация трасс для моделирования «Vanets» с помощью раскрашенных сетей Петри» [1] или Жозе Элунда «Моделирование с несколькими ограничениями гибкой производственной системы». [2]

Существует множество вариаций сетей Петри. Раскрашенные или цветные сети Петри в настоящее время являются одними из наиболее популярных и широко применяемых на практике моделей сетей Петри. [3]

Их используют, например, для имитационного моделирования дискретных бизнес-процессов [4], для имитационного моделирования производственных задач с целью эффективного и рационального использования компьютерного оборудования [5], для создания моделей управления парком автономных транспортных средств, систем их эксплуатации и обслуживания [6 – 9]. Для редактирования, моделирования и анализа раскрашенных сетей Петри была создана среда *CPN Tools*. Её возможности были использованы для моделирования информационно-телекоммуникационной системы предприятий [10, 11], верификации систем управления доступом [12] и моделирования интеллектуальных систем управления [13].

В раскрашенных сетях Петри существует несколько типов меток, содержащих в себе значения, которые обычно называют «цветом». Вместо цвета меткам могут быть приписаны значения, обладающие сложной внутренней структурой, т.е. относящиеся к сложным типам данных, и эти значения могут быть использованы в условиях срабатывания переходов [14 – 16].

Особенностью обычной раскрашенной сети Петри является возможность различать виды меток, которые в ней используются, однако у каждой метки может быть только одно значение. По этой причине метка может передавать по сети один параметр, что не всегда удобно, так как в некоторых моделях требуется передача сразу нескольких параметров.

Целью является описание новой математической модели – раскрашенной сети Петри с многоцветными метками, в которой реализована возможность существования меток, хранящих в себе несколько цветов, и их связанная передача по сети.

Рассматриваемая в работе раскрашенная сеть Петри с многоцветными метками позволяет присвоить одной метке одновременно несколько значений, каждое из которых будет использоваться в процессе работы сети. Данную модификацию можно применить для моделирования динамических систем, где требуется совместная передача значений нескольких параметров или переменных, например, для моделирования работы склада и его внутренних процессов [16], при моделировании систем управления маршрутами Ж/Д или автотранспорта.

Определение раскрашенной сети Петри с многоцветными метками

Раскрашенная сеть Петри с многоцветными метками (*PNMC – Petri nets multicolor*), состоящая из n позиций, m переходов и дуг d цветов, задаётся $PNMC = (P, T, C, R^-, R^+, \mu_0)$, где $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – конечное непустое множество позиций, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ – конечное непустое множество переходов, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_d\}$ – конечное непустое множество цветов, R^- и R^+ – матрицы инцидентности дуг, входящих в переходы и выходящих из переходов, μ_0 – начальная маркировка сети Петри.

Структура *PNMC* задается блочными матрицами инцидентности для каждого цвета $R^- = [R_1^-, R_2^-, \dots, R_d^-]^T$, $R^+ = [R_1^+, R_2^+, \dots, R_d^+]^T$.

В каждой позиции $p_i (i=1, \dots, n)$ могут находиться одна или несколько многоцветных меток. Многоцветная метка имеет следующую структуру: $M = [0, \dots, 1_{d_1}, 0, \dots, 1_{d_2}, \dots, 1_{d_k}, \dots, 0]^T$, где $M \in R^d$; d_1, d_2, \dots, d_k соответствуют цветам, содержащимся в метке.

Начальная маркировка μ_0 является блочной матрицей. Каждый i -ый блок матрицы соответствует конкретной позиции p_i и в нём содержатся все многоцветные метки, находящиеся в данной позиции.

Раскрашенная сеть Петри с многоцветными метками функционирует по следующему алгоритму.

1. Пусть μ_τ – текущая маркировка сети Петри. Переходы $t_j (j=1, \dots, m)$ проверяются на возможность срабатывания. Переход t_j разрешён, если при μ_τ выполняется следующее условие $\mu_\tau^u \geq e_j \otimes R^-$, где $e_j = [0, \dots, 1_j, \dots, 0]$, а μ_τ^u – матрицы, содержащие все возможные сочетания вектор-столбцов из каждого блока матрицы μ_τ . Операция « \otimes » – произведение вектор-строки e_j на блочную матрицу R^- . Если разрешённого перехода нет – работа сети Петри прекращается.

2. Срабатывает разрешённый переход t_j . Если таких переходов несколько, выбирается случайный. Для определения позиций, из которых уйдут метки, необходимо выполнить умножение вектор-строки $[1, 1, 1, \dots, 1_d]$ на $e_j \otimes R^-$. Результатом будет вектор-строка $[0, \dots, 1_{x_1}, 1_{x_2}, \dots, 1_{x_h}, \dots, 0]$, где x_1, x_2, \dots, x_h соответствуют номерам позиций, из которых перейдут метки. Если полученная вектор-строка содержит несколько единиц, необходимо разбить её на отдельные вектор-строки, содержащие одну единицу в каждой. Количество данных вектор-столбцов будет отображать количество новых появившихся меток.

3. Для определения позиций, в которые перейдут метки, необходимо выполнить умножение вектор-строки $[1, 1, 1, \dots, 1_d]$ на $e_j \otimes R^+$. Результатом будет вектор-строка $[0, \dots, 1_{y_1}, 1_{y_2}, \dots, 1_{y_l}, \dots, 0]$, где y_1, y_2, \dots, y_l соответствуют номерам позиций, в которые перейдут метки. Если полученная вектор-строка будет содержать несколько единиц, необходимо разбить её на отдельные вектор-строки, содержащие одну единицу в каждой.

4. Определяются новые многоцветные метки. Для этого необходимо получить вектор-столбец, показывающий, какой цвет изменится у каждой метки, совершившей переход:

$M^- = (e_j \otimes R^-) \cdot [0, \dots, 1_{x_q}, \dots, 0]^T$, где x_q указывает на позицию, в которой в данный момент находится метка.

На следующем шаге необходимо получить вектор-столбец, показывающий, какой цвет появится у метки, совершившей переход:

$M^+ = (e_j \otimes R^+) \cdot [0, \dots, 1_{y_e}, \dots, 0]^T$, где y_e указывает на позицию, в которой в данный момент находится метка.

Новая метка M' вычисляется по формуле:

$$M' = M - M^- + M^+.$$

5. Следующим этапом будет получение новой матрицы маркировок $\mu_{\tau+1}$. Для этого из μ_τ необходимо удалить вектор-столбец, отвечающий за метку, совершившую переход из блока, соответствующего позиции p_{x_q} , и добавить его в блок, соответствующий позиции p_{y_e} . После выполнения данного действия необходимо перейти к п. 1.

Описание работы раскрашенной сети Петри с многоцветными метками на примере конкретной сети

Рассмотрим пример функционирования раскрашенной сети Петри с многоцветными метками по приведённому выше алгоритму. Пусть дана некоторая распределенная система, представленная с помощью сети Петри, состоящей из 5 позиций, 4 переходов и дуг 7 цветов, т.е.:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}.$$

Данная сеть Петри представлена на рис. 1.

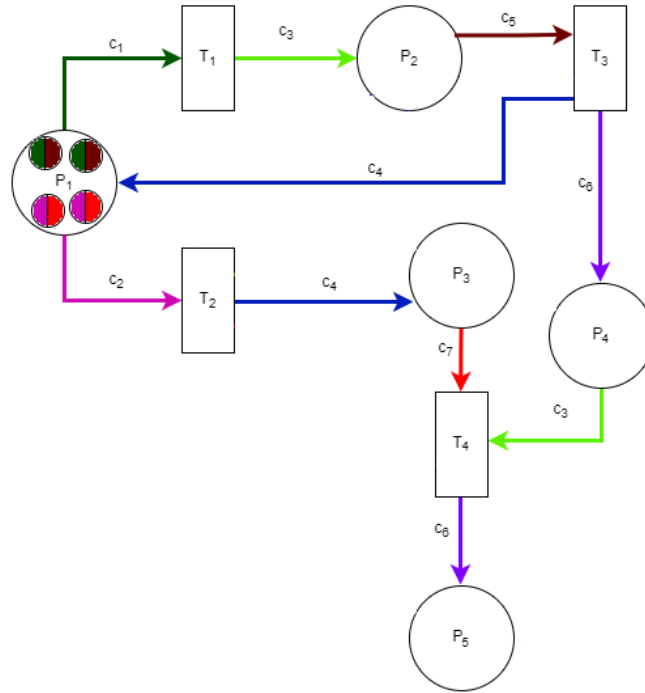


Рис. 1. Пример сети Петри с многоцветными метками
Fig. 1. Example of a Petri net with multicolored labels

Структура сети Петри задается блочными матрицами инцидентности для каждого цвета:

$$R^- = [R_1^-, R_2^-, R_3^-, R_4^-, R_5^-, R_6^-, R_7^-]^T, R^+ = [R_1^+, R_2^+, R_3^+, R_4^+, R_5^+, R_6^+, R_7^+]^T.$$

Начальное состояние – блочной матрицей начальной маркировки μ_0 . Матрицы инцидентности сети Петри имеют вид:

$$\begin{aligned}
 R_1^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_2^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_3^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; R_4^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 R_5^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_6^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_7^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 R_1^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_3^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_4^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$R_5^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_6^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_7^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $R_d^-(i, j)$ – вес дуги от p_i к t_j для k -го цвета; $R_d^+(i, j)$ – вес дуги от t_j к p_i для k -го цвета.

Начальная маркировка μ_0 имеет вид:

$$\mu_0 = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Опишем процесс функционирования сети:

1. В данный момент в позиции p_1 находятся 4 двухцветные метки. Проверим возможность срабатывания переходов. Для этого воспользуемся условием $\mu_0^u \geq e_j \otimes R^-$. В данном случае μ_0^u будет сравниваться с $e_j \otimes R^-$ поэтапно, т.е. будут рассмотрены все возможные сочетания вектор-столбцов из каждого блока матрицы μ_0 .

Переход 1:

$$\begin{aligned} \mu_0^1 \geq [1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mu_0^2 \geq [1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mu_0^3 \neq [1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mu_0^4 \neq [1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переход 2:

$$\mu_0^1 \neq [0 \ 1 \ 0 \ 0] \otimes R^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mu_0^2 \neq [0 \ 1 \ 0 \ 0] \otimes R^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mu_0^3 \geq [0 \ 1 \ 0 \ 0] \otimes R^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mu_0^4 \geq [0 \ 1 \ 0 \ 0] \otimes R^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По правилу срабатывания переходов активными могут быть переходы t_1 и t_2 . Пусть срабатывает переход t_1 .

2. Определим позицию, из которой уйдёт метка при срабатывании перехода t_1 . Для этого умножим $[1,1,1,1,1,1]$ на $[1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^-$:

$$[1,1,1,1,1,1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1,0,0,0,0].$$

Так как единица в получившейся вектор-строке $[1,0,0,0,0]$ стоит на 1 позиции, метка уйдёт из p_1 .

3. Определим, в какую позицию перейдёт метка при срабатывании перехода t_1 . Для этого умножим $[1,1,1,1,1,1]$ на $[1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^+$:

$$[1,1,1,1,1,1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0,1,0,0,0].$$

Так как единица в получившейся вектор-строке $[0,1,0,0,0]$ стоит на 2 позиции, метка перейдёт в p_2 .

4. Определим цвет, который изменится у метки. Для этого умножим $[1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^-$ на $[1,0,0,0,0]^T$, так как метка совершает переход из позиции p_1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определим цвет, который приобретёт метка. Для этого умножим $[1 \ 0 \ 0 \ 0] \otimes R^+$ на $[0,1,0,0,0]^T$, так как метка совершает переход из позиции p_2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Получаем новую многоцветную метку:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Новая матрица маркировок примет следующий вид:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

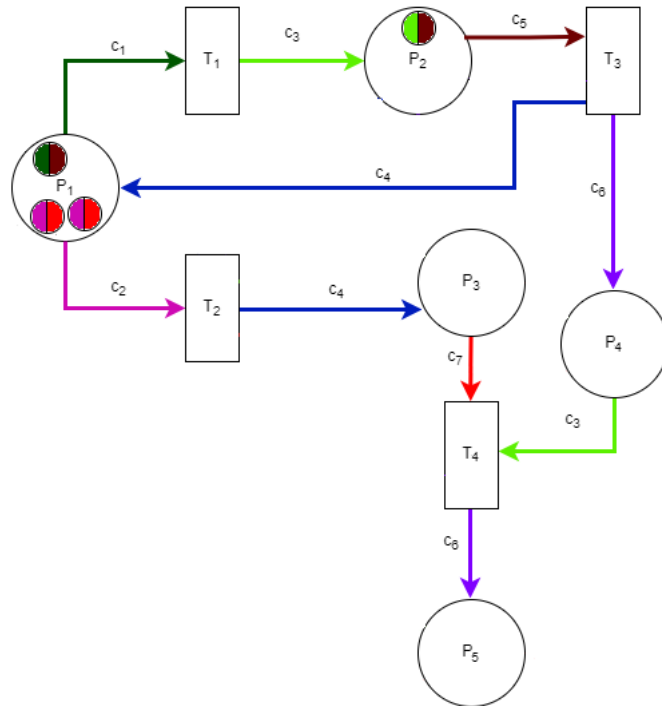


Рис. 2. Пример сети Петри с многоцветными метками после срабатывания перехода t_1

Fig. 2. Example of a Petri net with multicolored labels after a transition is triggered t_1

После получения матрицы маркировок μ_1 переходим к п. 1 алгоритма, описанного выше.

Заключение

В данной работе был описан алгоритм функционирования разработанной раскрашенной сети Петри с многоцветными метками и её преимущество над обычной раскрашенной сетью Петри. Различие заключается в том, что в разработанной сети метки имеют одновременно несколько цветов, что позволяет передавать несколько значений связанно. Данная особенность может пригодиться для моделирования динамических систем, где требуется совместная передача нескольких параметров. Например, при моделировании работы склада и его внутренних процессов, при моделировании систем управления маршрутами Ж/Д или автотранспорта.

Список источников:

1. Yuchen Xie. Modelisation et Verification Formelles de Systemes de Controle de Trains: thes... doct. Automatique, genie informatique, traitement du signal et des images – Ecole centrale de Lille. – 2019. – 251 p.
2. Jose Eloundou. Modelisation multi-contraintes d'un systeme de production flexible: thes... doct. Informatique – Rouen – 2016. – 201 p.
3. Башкин В.А., Ломазова И.А. Эквивалентность ресурсов в сетях Петри. М.: Научный мир, 2008. – 208 с.
4. Коган Ю.Г., Пителинский К.В., Щербина А.А. Содицированная раскрашенная сеть Петри: метод и средство имитационного моделирования // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. – 2021. – № 1. – С. 26-32.
5. Орлов С.П., Учайкин Р.А. Модели на раскрашенных сетях Петри для управления техническим обслуживанием компьютерного оборудования предприятия // Труды VII всероссийской научно-технической конференции. Пром-инжиниринг. – 2021. – С. 263-269.
6. Волхонская Е.Е., Орлов С.П. Системные модели парка автономных транспортных средств для виртуальных испытаний при организации технического обслуживания // Вестник астраханского государственного технического университета. Серия: управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 3. – С. 7-16.
7. Сусарев С.В., Орлов С.П., Бизюкова Е.Е., Учайкин Р.А. Моделирование процессов прогнозного технического обслуживания роботизированных агротехнических автомобилей // Математические методы в технологиях и технике. – 2021. – № 1. – С. 148-153.
8. Орлов С.П., Сусарев С.В. Система поддержки принятия решений при управлении техническим обслуживанием автономных транспортных средств // Онтология проектирования. – 2023. – Т. 13. – № 3. – С. 424-436.
9. Орлов С.П., Яковлева А.Е. Имитационная модель технического обслуживания парка автономных автомобилей в условиях дефицита запасных частей // Математические методы в технологиях и технике. – 2025. – № 3. – С. 67-73.
10. Кочкин Д.В., Горбунов В.А. Моделирование информационно-телекоммуникационной системы предприятия раскрашенными сетями Петри // Вестник череповецкого государственного университета. – 2024. – №1. – С. 48-58.
11. Кочкин Д.В. Моделирование информационной системы предприятия на базе аппарата раскрашенных сетей Петри // Сборник научных статей 9-ой Международной научно-практической конференции. Перспективное развитие науки, техники и технологий. – 2019. – С. 122-125.
12. Тихонов В.А. Новиков Верификация систем управления доступом на основе моделирования раскрашенными сетями Петри // Научное развитие технологий в космических исследованиях земли. – 2021. – Т. 16. – № 6. – С. 50-59.

References:

1. Xie Yu. Modelisation et Verification Formelles de Systemes de Contrôle de Trains. Thes... doct. Ecole centrale de Lille; 2019.
2. Jose El. Modelisation Multi-Contraintes d'un Systeme de Production Flexible. Thes... doct. Informatique – Rouen; 2016.
3. Bashkin V.A., Lomazova I.A. Equivalence of Resources in Petri Nets. Moscow: Scientific World; 2008.
4. Kogan Yu.G., Pitelinsky K.V., Shcherbina A.A. A Codified Colored Petri net: a Method and Means of Simulation Modeling. The Defense Complex is Dedicated to the Scientific and Technological Progress of Russia. 2021;1:26-32.
5. Orlov S.P., Uchaykin R.A. Models on Coloured Petri Nets for Managing Maintenance of Computer Equipment of the Enterprise. In: Proceedings of the 7th All-Russian Scientific and Technical Conference on Industrial Engineering. Chelyabinsk; 2021. p. 263-269.
6. Volkhonskaya E.E., Orlov S.P. System Models of the Fleet of Autonomous Vehicles for Virtual Tests in the Organization of Maintenance. Bulletin of the Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Engineering and Computer Science. 2023;3:7-16.
7. Susarev SV, Orlov SP, Bizyukova EE, et al. Modelling of Processes of Predictive Maintenance of Robotic Agrotechnical Vehicles. Mathematical Methods in Technology and Engineering. 2021;1:148-153.
8. Orlov S.P., Susarev S.V. Decision Support System for Managing Maintenance of Autonomous Vehicles. The Ontology of Design. 2023;13(3):424-436.
9. Orlov S.P., Yakovleva A.E. Simulation Model of Maintenance of a Fleet of Autonomous Vehicles in Conditions of Shortage of Spare Parts. Mathematical Methods in Technology and Engineering. 2025;3:67-73.
10. Kochkin P., Gorbunov V.A. Modelling of the Information and Telecommunication System of an Enterprise with Coloured Networks. Bulletin of Cherepovets State University. 2024;1:48-58.
11. Kochkin DV. Modelling of the Enterprise Information System Based on the Apparatus of Coloured Petri Nets. In: Proceedings of the 9th International Scientific and Practical Conference on Promising Development of Science, Technology and Technology; Kursk; 2019. p. 122-125.
12. Tikhonov V.A. Novikov Verification of Access Control Systems Based on Modelling with Coloured Petri Nets. High-Tech Technologies in Space Exploration of the Earth. 2021;16(6):50-59.

13. Гусейнзаде Ш.С. Моделирование интеллектуальных систем управления с применением модифицированных нечетких раскрашенных сетей Петри // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2020. – Т. 17. – №10. – С. 30-37.

14. Кизилев Е.А. Методика построения цветных сетей Петри, моделирующих работу цифрового автомата // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2017. – № 3. – С. 36-47.

15. Седых И.А., Аникеев Е.С. Применение раскрашенных временных сетей Петри для моделирования цементного производства // Вестник Донского государственного технического университета. – 2016. – № 4. – С. 140-145.

16. Седых И.А., Тамбовцев А.А. Применение раскрашенных вложенных сетей Петри для подбора мест хранения и отпуска продуктов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2024. – № 3. – С. 76-85.

13. Huseynzade S.S. Modelling of Intelligent Control Systems Using Modified Fuzzy Coloured Petri Nets. Bulletin of Computer and Information Technologies. 2020;17(10):30-37.

14. Kizilov E.A. Methodology for Constructing Coloured Petri Nets Simulating the Operation of a Digital Automaton. News of Higher Educational Institutions. The Volga Region. Technical Sciences. 2017;3:36-47.

15. Sedykh I.A., Anikeev E.S. Application of Coloured Time Petri Nets for Modelling Cement Production. Bulletin of the Don State Technical University. 2016;4:140-145.

16. Sedykh I.A., Tambovtsev A.A. Application of Coloured Nested Petri Nets for the Selection of Storage and Release Sites for Products. Bulletin of the Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia. 2024;3:76-85.

Информация об авторах:

Седых Ирина Александровна

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Автоматизированные системы управления» Липецкого государственного технического университета, Scopus-Author ID: 36349600200, Research-ID-Web of Science: R-2250-2017, Author-ID-РИНЦ: 431868, ORCID 0000-0003-0012-8103.

Тамбовцев Александр Андреевич

аспирант кафедры «Автоматизированные системы управления» Липецкого государственного технического университета, Author-ID-РИНЦ: 1215105.

Information about the authors:

Sedykh Irina Aleksandrovna

Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of Automated Control Systems of Lipetsk State Technical University, Scopus Author ID: 36349600200, Research ID-Web of Science: R-2250-2017, RSCI Author ID: 431868, ORCID: 0000-0003-0012-8103.

Tambovtsev Alexander Andreevich

Postgraduate Student at the Department of Automated Control Systems of Lipetsk State Technical University, RSCI Author ID: 1215105.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 12.11.2025; одобрена после рецензирования 14.12.2025; принята к публикации 21.12.2025.

The article was submitted 12.11.2025; approved after reviewing 14.12.2025; accepted for publication 21.12.2025.

Рецензент – Малаханова А.Г., кандидат технических наук, доцент, Брянский государственный технический университет.

Reviewer – Malakhanova A.G., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bryansk State Technical University.