

## Управление в организационных системах

Научная статья  
Статья в открытом доступе  
УДК 519:510.3;159.98  
doi: 10.30987/ 2658-4026-2024-2-127-133

### Методика контроля знаний обучающихся на основе биномиальной оценки случайного числа неправильных ответов с учетом вероятности их обнаружения

Сергей Алексеевич Багрецов<sup>1✉</sup>, Эдуард Владимирович Мищенко<sup>2</sup>, Людмила Владимировна Розанова<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>. Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия  
<sup>1</sup> vka@mil.ru

#### Аннотация.

Рассматривается методика оценки знаний обучающихся с учетом априорной оценки вероятностных параметров контролируемых процедур и требуемой достоверности результатов контроля. При этом учитывается предыдущий опыт и субъективная оценка эффективности процесса обучения преподавателя по данной теме на основе предполагаемого уровня усвоения изучаемого материала данным контингентом обучающихся.

**Ключевые слова:** вероятность, функция распределения, биномиальное и нормальное распределения параметров, шкала оценок, математическое ожидание, дисперсия

**Для цитирования:** Багрецов С.А., Мищенко Э.В., Розанова Л.В. Методика контроля знаний обучающихся на основе биномиальной оценки случайного числа неправильных ответов с учетом вероятности их обнаружения // Эргодизайн. №2 (24). 2024. С. 127-133. <http://dx.doi.org/10.30987/2658-4026-2024-2-127-133>.

Original article  
Open access article

### Methodology for Monitoring Students' Knowledge Based on a Binomial Estimate of the Random Number of Incorrect Answers, Considering Their Detection Probability

Sergey A. Bagretsov<sup>1</sup>, Eduard V. Mishchenko<sup>2</sup>, Lyudmila V. Rozanova<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>. A.F. Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia  
<sup>1</sup> vka@mil.ru

#### Abstract.

The methodology for assessing students' knowledge is considered, taking into account a priori estimate of the probabilistic parameters of the control procedures and the required reliability of the control results, while taking into account previous experience and a subjective assessment of the effectiveness of the teacher's learning process on this topic based on the expected level of assimilating the studied material by this contingent of students.

**Keywords:** probability, distribution function, binomial and normal distributions of parameters, rating scale, mathematical expectation, dispersion

**For citation:** Bagretsov S.A., Mishchenko E.V., Rozanova L.V. Methodology for Monitoring Students' Knowledge Based on a Binomial Estimate of the Random Number of Incorrect Answers, Considering Their Detection Probability // Ergodesign. 2024;2(24):127-133. <http://dx.doi.org/10.30987/2658-4026-2024-2-127-133>.

## Введение

Одной из задач повышения уровня подготовки специалистов, является совершенствование подходов к осуществлению образовательной деятельности – как с точки зрения его организации, так и оценки текущих знаний обучающихся. В первом случае к традиционным формам обучения все чаще предлагается использовать современные технологии, в том числе связанные с внедрением элементов искусственного интеллекта [1]. Во втором – предпочитают использовать традиционные формы контроля знаний, применяя различные шкалы оценок [2]. В настоящее время реализация текущего контроля знаний осуществляется, в большинстве случаев, при условии известного общего объема знаний, охватывающих тему изучаемого предмета, и общим количеством вопросов по теме. Как правило, принимается условие однородности предлагаемых для оценки знаний контрольных вопросов, в итоге оцениваемых в дихотомической шкале оценок, т.е.: ответ правильный ( $x=1$ ) или неправильный ( $x=0$ ). При этом в процессе контроля обычно задается ограниченное количество вопросов [3], не охватывающих весь объем изучаемого материала. Кроме этого не учитывается степень уверенности, что процесс обучения был эффективным с учетом статистики посещаемости занятий и вероятности усвоения обучающимися изучаемого материала.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы оценить уровень знаний обучающихся по теме с учетом предыдущего оценивания, а также статистики посещаемости занятий и вероятности усвоения пройденного материала.

Задача решается в два этапа. На первом этапе из массива контрольных вопросов, соответствующих численному значению максимального количества ошибок в ответах обучающихся, определяется функция распределения числа ошибочных ответов. На втором этапе на основе пуассоновского приближения определяется зависимость числа ошибочных ответов от ожидаемой вероятности правильного ответа, что позволяет перейти от обобщенных количественных (вероятностных) оценок знаний к их качественным значениям.

## Определение функции распределения числа ошибочных ответов из массива

## контрольных вопросов с учетом указанных выше факторов

Пусть в контролируемой теме содержится  $N$  вопросов. При заданной вероятности  $P_1$  и достоверности  $P_2$  может оказаться неизученными  $X$  вопросов, причем выбор предъявляемых вопросов происходит случайно и один и тот же вопрос предъявляется единожды (выборка без возвращения). Тогда, используя пуассоновское приближение с номинальной вероятности случайной величины  $b$  (допустимое максимальное количество неправильных ответов, дающее право на получение положительной оценки), определим необходимое количество предъявляемых вопросов  $K$  при рассчитанных значениях вероятности обнаружения невыученных вопросов [4, 5].

Таким образом, задача определения количества предъявляемых вопросов сводится к нахождению возможного максимального количества неизученных вопросов  $X$  и определению вероятности обнаружения невыученных вопросов  $P_3$ .

Возможное количество максимально неизученных вопросов имеет биномиальное распределение, но можно использовать центральную предельную теорему для нахождения  $X$  [4, 5], так как суммарное число вопросов  $N$  считается достаточным для того, чтобы, несмотря на зависимость опытов, закон распределения максимального количества неизученных вопросов  $X$  принять приближенно нормальным.

Под понятием зависимость опытов подразумевается вероятность получения неправильного ответа при условии, что другой ответ (любой) уже был неправильным.

Рассмотрим полученную величину неизученных вопросов  $X$  как суммарное число вопросов  $N$  слагаемых

$$X = \sum_{i=1}^N x_i ,$$

где: величина  $x_i$  принимает значение 1, в случае правильного ответа, и 0, в случае неправильного ответа.

Находим математическое ожидание  $m_x$  случайной величин  $X$

$$m_x = NP_1 , \quad (1)$$

где:  $P_1$  – ожидаемая вероятность получения неправильного ответа.

$$P_1 = 1 - K_0 P_4 = 1 - P_5, \quad (2)$$

где:  $P_4$  – вероятность усвоения контролируемой темы в процессе ее изучения;

$K_0$  – коэффициент оценки эффективности обучения [6, 7];

$P_5$  – ожидаемая вероятность получения правильного ответа.

Численное значение коэффициента  $K_0$  выбирается руководителем обучения из интервала (0,9;1) и характеризует степень уверенности его в том, что процесс обучения был эффективным, т.е. что обучающимися усвоено более 0,9 объема материала контролируемой темы [7, 8, 5].

Вероятность усвоения контролируемой темы определяется с помощью соотношения

$$P_4 = \frac{JN K_n}{J_0}, \quad (3)$$

где:  $Kx_i x_j$  – корреляционный момент случайной величины  $x_i x_j$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, H; j = i$ );

$Dx_i$  – дисперсия случайной величины  $x_i$ ;

$C_H$  – число сочетаний заданных вопросов.

$$\sum_{i=1}^H Dx_i = \sum_{i=1}^H mx_i (1 - P_1). \quad (5)$$

Находим

$$Kx_i x_j = M[x_i x_j] - mx_i mx_j \quad (6)$$

где:  $mx_i$  и  $mx_j$  – параметры случайной величины  $x_i$  и  $x_j$ ;

$$D_x = HP_1(1 - P_1) + 2C_H^2(P_1 P_6 - P_1^2) = P_1[H(1 - P_1) + 2C_H^2(P_6 - P_1)] \quad (8)$$

Учитывая нормальный закон распределения случайной величины  $X$

$$\left\{ F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{G_x}\right) \right\},$$

находим по таблице функции  $\Phi^*(x)$  [9] такое значение неизученных вопросов  $L$ , для которого

$$P(x < L) = P_2$$

где:  $J_0$  – общее количество предъявляемой информации по изученной теме;

$J$  – среднее количество информации, которое может усвоить за одно занятие среднестатистический обучаемый;

$N$  – коэффициент посещаемости занятий, который равен отношению среднего количества обучаемых действительно посещавших занятия, к общему списочному числу;

$K_n$  – коэффициент посещаемости занятий, который равен отношению среднего количества обучаемых действительно посещавших занятия, к общему списочному числу.

В формуле (3) верхний предел  $P_4$  необходимо ограничить 1, т.е.  $P_4 \leq 1$ .

Дисперсия  $D_x$  случайной величины  $X$  выражается следующей формулой [4]:

$$D_x = \sum_{i=1}^H Dx_i + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^H Kx_i x_j = \sum_{i=1}^H Dx_i + 2C_H^2 Kx_i x_j, \quad (4)$$

$M[x_i x_j]$  – математическое ожидание произведения двух случайных величин  $x_i$  и  $x_j$ .

Так как  $X_j$  принимает только два значения, а именно: 1 (при  $x_i = 1$  и  $x_j = 1$ ) или 0 (в остальных случаях), тогда

$$M[x_i x_j] = 1 \cdot P[(x_i = 1)(x_j = 1)] = P_1 P_6 \quad (7)$$

где:  $P_6$  – вероятность получения неправильного ответа при условии, что другой (любой) ответ уже был неправильным.

Подставляя (1), (5), (6) и (7) в (4), получим:

Где:

$P_2$  – численное значение доверительной вероятности при определении максимального количества неизученных вопросов, которое обычно выбирается из ряда 0,95; 0,99; 0,999 [5];

$G_x$  – среднее квадратичное отклонение случайной величины  $x$  равно:

$$G_x = \sqrt{D_x} \quad (9)$$

Звездочка рядом с  $\Phi$  указывает на статистический характер соответствующего параметра.

Следовательно, нормальную функцию распределения  $L$  можно представить в следующем виде:

$$\Phi^* \left( \frac{L - m_x}{G_x} \right) = P_2 \quad (10)$$

Теперь, используя пуассоновское приближение биномиальной случайной величины  $b$ , определим начальное количество предъявляемых вопросов.

Оценка числа ошибочных ответов в последовательности контрольных вопросов с учетом ожидаемой вероятности получения неправильного ответа

Пусть имеется последовательность  $K$  предъявляемых случайным образом вопросов с постоянной вероятностью появления неизученных вопросов, равной  $\frac{L}{H} = P_3$ . Тогда

число  $b$  – количество неправильных ответов, обнаруженных в последовательности  $K$ , является биномиальной случайной величиной и при использовании пуассоновского приближения для этой случайной величины получим

$$P(\varepsilon \leq P_1) = 1 - P(b; m_n) = P_7, \quad (11)$$

где:  $b$  – допускаемое количество неправильных ответов в последовательности являемых вопросов  $K$ ;

$\varepsilon$  – случайная величина меньшая или равная ожидаемой вероятности получения неправильного ответа  $P_1$ , соответствующая

возможному числу неправильных ответов  $b$  в последовательности  $K$ ;

$P_7$  – вероятность того, что в последовательности  $K$  предъявленных вопросах окажется  $b$  неизученных вопросов;

$m_n$  – математическое ожидание величины  $b$ ;

$$m_n = KP_3 = K \frac{L}{H} \quad (12)$$

Зависимость величины  $b$  от ожидаемой вероятности получения неправильного ответа  $P_1(2)$  является очевидной, поэтому ниже (в таблице 1) приведен используемый нами вариант определения  $b$ :

Следовательно, значение  $K$  можно получить из формулы (12), используя формулу (11) и выбранное значение  $b$

$$P(\varepsilon \leq P_1) = 1 - P_1(b; KP_3) = P_7 \quad (13)$$

**Пример.** Определим значение  $K$ , если известно, что:

–  $H = 200$  – число вопросов в контролируемой теме;

–  $P_1 = 0,09$  – ожидаемая вероятность получения неправильного ответа (отсюда из таблицы 1  $b = 4$ );

–  $P_6 = 0,105$  – вероятность получения неправильного ответа при условии, что другой (любой) ответ уже был неправильным;

–  $P_2 = 0,999$ ;

–  $P_7 = 0,95$  – достоверность контроля;

–  $C_H = 140$  – число сочетаний заданных вопросов.

Таблица 1.

Table 1.

### Вариант определения $b$

#### A variant of the definition $b$

$P(\varepsilon \leq P_1)$	$b$
$0 < P_1$	1
$0,02 \leq P_1$	2
$0,05 \leq P_1$	3
$0,09 \leq P_1$	4
$0,14 \leq P_1$	5

Подставляя значения в (8), получим:

$$D_x = P_1[H(1-P_1) + 2C_H^2(P_6 - P_1)] = 0,09[200(1-0,09) + 2 \times 140^2(0,105 - 0,09)] = 69,2 ;$$

в (1) и (9), получим:

$$m_x = HP_1 = 200 \cdot 0,09 = 18$$

и

$$G_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{69,2} \approx 8,3$$

Подставляя значения  $G_x, m_x, P_2$  в (10), находим  $L = 26$  :

$$\Phi^*\left(\frac{L - m_x}{G_x}\right) = P_2$$

$$P(\varepsilon \leq P_1) = 1 - P_1(b; KP_3) = 1 - P_1(4; 0,13K) = 0,95$$

или  $0,05 = P_1(4; 0,13K)$ .

Используя таблицу распределения функции Пуассона [9], получим

$$0,13K = 1,95; \quad K = 15.$$

Оценка, выставляемая за знания по курсу, является вероятностным отражением возможного состояния эффективности обучения по понятиям, не вошедшим в серию предъявленных вопросов  $K$  из программы контроля, поэтому объем этой серии имеет важное значение.

Результаты вычислений значений  $K$  для различных  $H$  и  $P_3$  по ранее приведенным формулам, представлены в таблице 2. Расчет осуществлялся для значений доверительной вероятности при определении максимального количества неизученных вопросов  $P_2$  – достоверности результатов контроля

Определяем вероятность появления неизученных вопросов  $P_3$  из формулы:

$$P_3 = \frac{L}{H} = \frac{26}{200} = 0,13$$

Подставляем найденные значения в формулу (13)

равными 0,95, так как это наиболее предпочтительное значение, применяемое при инженерных расчетах.

Значения оценок в зависимости от  $P_5$  и от количества неправильных ответов в серии  $K$  приведены в таблице 3. Расчет оценок базируется на методе В.П. Беспалько [7].

#### Заключение

Рассмотренная методика оценки знаний позволяет учесть широкий спектр априорных данных, учитывающих опыт и интуицию преподавателя, проводящего контроль знаний обучающихся. Существенным достоинством методики является то, что оценки, получаемые на её основе, могут быть представлены в дихотомической, порядковой и других шкалах оценок знаний обучающихся.

Таблица 2.

### Значения количества предъявляемых вопросов

Table 2.

#### The values of the number of questions presented

Общее количество вопросов (H)	Вероятность получения правильного ответа (P <sub>5</sub> )			
	0,86-0,91	0,91-0,95	0,95-0,98	0,98-1
До 40	8	7	5	4
40- 50	8	7	5	4
50-60	9	8	5	4
60-70	9	8	6	5
70-80	10	9	6	5
80-90	11	9	7	6
90-100	12	10	8	7
100-120	13	11	9	8
120-150	14	12	10	9
150-200	15	13	11	10

Таблица 3.

Table 3.

## Значения оценок

## Evaluation values

Количество неправильных ответов	Вероятность получения правильного ответа			
	0,86-0,91	0,91-0,95	0,95-0,98	0,98-1
0	Отлично	Отлично	Отлично	Отлично
1	Отлично	Хорошо	Хорошо	Хорошо
2	Хорошо	Удовл.	Удовл.	Удовл.
3	Удовл.	Удовл.	Неудовл.	Неудовл.
4	Удовл.	Неудовл.	Неудовл.	Неудовл.
5	Неудовл.	Неудовл.	Неудовл.	Неудовл.

Данная методика может быть применена как отдельный инструмент совершенствования системы оценивания, так и комплексно – посредством её включения в электронные учебники или специальное программное обеспечение в системе

электронной информационно-образовательной среды вузов. Особую актуальность эта методика приобретает в случае её реализации посредством применения технологий искусственного интеллекта.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Багрецов С.А., Яхваров Е.К., Розанова Л.В.** Пути совершенствования электронной информационно-образовательной среды вуза посредством внедрения технологий искусственного интеллекта // Армейский сборник. 2023. № 6. С. 132-135.
2. **Багрецов С.А., Молдованова С.М., Розанова Л.В.** Предварительная экспертная оценка глубины проработки задач, поставленных в диссертации, как косвенный показатель сроков ее завершения // Эргодизайн. 2023. № 2(20). С. 101-108. DOI 10.30987/2658-4026-2023-2-101-108. EDN IPSHHG.
3. **Багрецов С.А.** Оценка знаний обучаемых в автоматизированных обучающих системах // Пушкин: ПВУРЭ ПВО; 1991. 391 с.
4. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Издательский центр «Академия». 2003. 464 с. ISBN 5769510528.
5. **Багрецов С.А., Тарасов А.В., Ачкасов Н.Б.** Психолого-педагогический эксперимент: организация и методы обработки результатов: монография. Под ред. С.А. Багрецова. СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского. 2008. 347с.
6. **Беспалько В.П.** Программированное обучение. Дидактические основы. М. Высшая школа. 1970. 274 с.
7. **Беспалько В.П., Татур Ю.Г.** Системно-методическое обеспечение учебного процесса // М.: МГУ. 1992. 348 с. ISBN 5-06-000170-9.
8. **Свиридов А.П.** Введение в статистическую теорию обучения и контроля знаний. Под ред. Ю.Н. Кушелева. Ч.2. М.: МЭИ. 1974. 152 с.
9. **Большев Л.Н., Смирнов Н.В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука. 1983. 416 с.

## REFERENCES

1. **Bagretsov S.A., Yakhvarov E.K., Rozanova L.V.** Ways to Improve the Electronic Information and Educational Environment of a University by Introducing Artificial Intelligence Technologies. The Army Magazine. 2023;6:132-135.
2. **Bagretsov S.A., Moldovanova S.M., Rozanova L.V.** Preliminary Expert Evaluation of the Elaboration Depth of Tasks Set in the Thesis, as an Indirect Indicator of Its Completion Date. Ergodesign. 2023;2(20):101-108. DOI 10.30987/2658-4026-2023-2-101-108.
3. **Bagretsov S.A.** Assessment of Students' Performance in Automated Training Systems. Pushkin: PVURE PVO; 1991. 391 p.
4. **Ventzel E.S., Ovcharov L.A.** Probability Theory and Its Engineering Applications. Moscow: Academy; 2003. 464 p. ISBN 5769510528.
5. **Bagretsov S.A., Tarasov A.V., Achkasov N.B. Bagretsova SA, editor.** Psychological and Pedagogical Experiment: Organization and Methods of Processing the Results. Saint Petersburg: Publishing House of A.F. Mozhaisky Military Space Academy; 2008. 347 p.
6. **Bespalko V.P.** Programmed Training. Didactic Basics. Moscow Vysshaya Shkola; 1970. 274 p.
7. **Bespalko V.P., Tatur Yu.G.** Systemic and Methodological Support of the Educational Process. Moscow: Publishing House of Moscow State University; 1992. 348 p. ISBN 5-06-000170-9.
8. **Sviridov A.P. Kusheleva YuN, editor.** Introduction to the Statistical Theory of Learning and Control of Knowledge. Part 2. Moscow: Publishing House of Power Engineering Institute; 1974. 152 p.
9. **Bolshev L.N., Smirnov N.V.** Tables of Mathematical Statistics. Moscow: Nauka; 1983. 416 p.

**Информация об авторах:**

**Багрецов Сергей Алексеевич** - доктор технических наук, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, профессор кафедры, тел. 8(911)779-86-94, международные идентификационные номера автора SPIN-код: 7463-8396, AuthorID: 514551

**Мищенко Эдуард Владимирович** – кандидат военных наук, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, тел. 8(911)087-96-37

**Розанова Людмила Владимировна** – научный сотрудник, Военный институт (научно-исследовательский) Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, международные идентификационные номера автора AuthorID: 156584

**Information about the authors:**

**Bagretsov Sergey Alekseevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor of A.F. Mozhaisky Military Space Academy, Professor of the Department, ph. 8(911)779-86-94, the author's international identification numbers: SPIN-code: 7463-8396, AuthorID: 514551

**Mishchenko Eduard Vladimirovich** – Candidate of Military Sciences, A.F. Mozhaisky Military Space Academy, ph. 8(911)087-96-37

**Rozanova Lyudmila Vladimirovna** – researcher, Military Institute (research) A.F. Mozhaisky Military Space Academy, the author's international identification numbers: AuthorID: 156584

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.**

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**The authors declare no conflicts of interests.**

**Статья поступила в редакцию 03.04.2024; одобрена после рецензирования 22.04.2024; принята к публикации 24.04.2024. Рецензент** – Спасенников В.В., доктор психологических наук, профессор, главный редактор журнала «Эргодизайн»

**The paper was submitted for publication on the 03<sup>rd</sup> of April, 2024; approved after the peer review on the 22<sup>nd</sup> of April, 2024; accepted for publication on the 24<sup>th</sup> of April, 2024. Reviewer** – Spasennikov V.V., Doctor of Psychology, Professor, Editor-in-Chief of the journal “Ergodesign”.

**ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!****Образец ссылок на патенты и изобретения в журнале «Эргодизайн»**

Авторское свидетельство № 1714653 А1 СССР, МПК G09В 9/00. Тренажер руководителя группы операторов: № 4827305: заявл. 21.05.1990: опубл. 23.02.1992 / С. А. Багрецов, Г. М. Попов, И. С. Давыдов; заявитель Пушкинское высшее училище радиоэлектроники противовоздушной обороны. – EDN JKEIP1.

Авторское свидетельство № 1608732 А1 СССР, МПК G09В 9/00. Имитатор отметок целей для тренажера операторов АСУ: № 4622468: заявл. 20.12.1988: опубл. 23.11.1990 / С. А. Багрецов, Н. М. Воронов, А. Н. Романов, А. А. Филимонов; заявитель Пушкинское высшее училище радиоэлектроники противовоздушной обороны. – EDN LRLAHZ.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017611084 Российская Федерация. Программа выбора оптимальных вариантов обучения военных специалистов на этапе ввода в строй: № 2016660200: заявл. 27.09.2016: опубл. 19.01.2017 / Э. В. Мищенко, В. М. Гусаков, С. А. Багрецов, И. Ю. Воронков. – EDN IPRIBM.