

Научная статья

Статья в открытом доступе

УДК 621.01

doi: 10.30987/2782-5957-2022-12-36-47

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОГО МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Андрей Константинович Толстошеев✉

Брянский государственный технический университет, Брянск, Россия
andrei.tolstosheev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9417-775X>

Аннотация

Цель исследования заключается в анализе собственных частот и форм малых колебаний плоского манипулятора параллельной структуры и определении влияния упругих и инерционных свойств промежуточных звеньев и привода на собственные частоты и формы. Статья посвящена решению задачи обеспечения виброустойчивости манипуляторов. Используются аналитические методы теории колебаний и вычислительные эксперименты в программном комплексе «Универсальный механизм». Новизна работы состоит в определении зависимости собственных частот и форм колебаний плоского манипулятора параллельной структуры от соотношения упругих и инерционных свойств звеньев и привода. В результате исследования разработаны аналитическая и несколько компьютерных моделей плоского манипулятора с тремя степенями свободы, определены собственные частоты и формы колебаний для разработанных моделей. Выводы: замена абсолютно жёстких промежуточных звеньев упругими стержнями привела

к появлению собственных частот и соответствующих им собственных форм, на которых выходное звено колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости движения звеньев манипулятора; колебания выходного звена в вертикальной и горизонтальной плоскостях на собственных формах разделены; значения собственных частот, на которых выходное звено колеблется в вертикальной плоскости, не зависят от коэффициента жёсткости привода, а определяются упругими и инерционными свойствами стержней; значения собственных частот, на которых выходное звено колеблется в горизонтальной плоскости, зависят от соотношения податливостей привода и стержней; влияние масс упругих звеньев на значения собственных частот определяется видом собственных форм и соотношением инерционных параметров выходного звена и стержней.

Ключевые слова: манипулятор, структура, колебания, частоты и формы, моделирование.

Ссылка для цитирования:

Толстошеев А.К. Анализ собственных частот и форм колебаний плоского манипулятора параллельной структуры / А.К. Толстошеев // Транспортное машиностроение. – 2022. - № 12. – С. 36 – 47. doi: 10.30987/2782-5957-2022-12-36-47.

Original article

Open Access Article

ANALYSIS OF OWN FREQUENCIES AND OSCILLATION FORMS OF A PLANE PARALLEL MANIPULATOR

Andrey Konstantinovich Tolstosheev✉

Bryansk State Technical University, Bryansk, Russia
andrei.tolstosheev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9417-775X>

Abstract

The study objective is to analyze the own frequencies and small-amplitude oscillations of a plane manipulator having parallel structure and to determine the influence of elastic and inertial properties of intermediate links and the drive on own frequencies and forms. The paper is devoted to solving the problem of ensur-

ing vibration stability of manipulators. Analytical methods of the theory of oscillations and computational experiments in the software package "Universal Mechanism" are used. The novelty of the work is in defining the dependence of the own frequencies and oscillation forms of a plane parallel manipulator on the ratio of

elastic and inertial properties of the links and the drive. As a result of the research, analytical and several computer models of a plane manipulator with three degrees of freedom are developed, own frequencies and oscillation forms for the developed models are determined. Conclusions: the replacement of absolutely rigid intermediate links with elastic rods led to the appearance of own frequencies and own modes corresponding to them, on which the output link oscillates in the vertical plane perpendicular to the plane of the manipulator links movement; the oscillations of the output link in the vertical and horizontal planes on their own forms are separated; the values of own frequencies at which

Reference for citing:

Tolstosheev A.K. Analysis of own frequencies and oscillation forms of a plane parallel manipulator. Transport Engineering. 2022; 12:36-47. doi: 10.30987/2782-5957-2022-12-36-47.

Введение

Манипуляторы нового типа с параллельной структурой благодаря высоким показателям по быстродействию, грузоподъёмности и точности находят всё большее применение в различных транспортных и технологических машинах [1, 2]. Одной из задач, возникающих при проектировании манипуляторов, является обеспечение виброустойчивости их конструкции. Решение этой задачи связано с определением собственных частот и форм малых колебаний манипулятора. На движение выходного звена манипулятора как параллельной, так и последовательной структуры, существенное влияние оказывают колебания, обусловленные упругостью промежуточных звеньев кинематической цепи [3, 4]. Однако при определении собственных частот колебаний манипуляторов параллельной структуры используют, как правило, аналитические методы и упрощённые расчётные схемы, в которых упругие и инерционные свойства промежуточных звеньев не учитывают. Так, в работе [5] на примере плоского механизма разработана методика расчёта аналитическим методом собственных частот колебаний манипулятора с параллельной структурой, в которой учитывают инерционные свойства выходного звена и упругие свой-

Материалы, модели, эксперименты и методы

Аналитическое моделирование.

Аналитический расчёт собственных частот колебаний манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями выполняем в соответ-

the output link oscillates in the vertical plane do not depend on the coefficient of rigidity of the drive, but are determined by the elastic and inertial properties of the rods; the values of own frequencies at which the output link oscillates in the horizontal plane depend on the ratio of the drive and rods compliance; the influence of the elastic link masses on the values of their own frequencies is determined by the type of their own forms and the ratio of inertial parameters of the output link and rods.

Keywords: manipulator, structure, oscillations, frequencies and forms, modeling.

ства приводов, а промежуточные звенья считают невесомыми и абсолютно жёсткими. Предложенная методика не предусматривает определение собственных форм колебаний. В работе [6] с использованием данной методики выполнен расчёт собственных частот пространственного поступательно направляющего манипулятора с тремя степенями свободы, у которого выходное звено описывается как материальная точка. Аналогичные допущения приняты при расчёте свободных и вынужденных колебаний поступательно направляющих манипуляторов иной параллельной структуры [7-9].

Настоящая работа посвящена анализу собственных частот и форм малых колебаний плоского манипулятора параллельной структуры и определению влияния упругих и инерционных свойств промежуточных звеньев, а также податливости привода на собственные частоты и формы. Для вычислительных экспериментов использован программный комплекс «Универсальный механизм» [10, 11]. С целью подтверждения достоверности численных результатов в работе выполнен сравнительный расчёт собственных частот колебаний манипулятора аналитическим и численным методами.

ствии с методикой [5]. Рассмотрим плоский манипулятор с тремя степенями свободы в фиксированном положении в гори-

зонтальной плоскости xOy и заторможенными приводами (рис. 1).

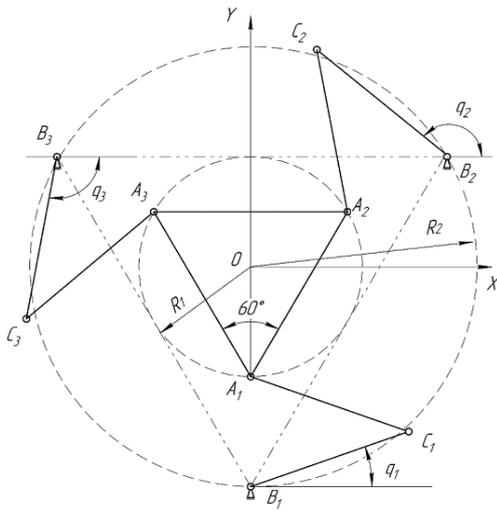


Рис. 1. Кинематическая схема манипулятора
Fig. 1. Kinematic diagram of the manipulator

Начало неподвижной декартовой системы координат расположим в центре масс выходного звена, изображённого в виде треугольника $A_1A_2A_3$, массой m и моментом инерции I . Массой промежуточных звеньев, выполненных в виде стержней одинаковой длины L , пренебрегаем. В качестве обобщённых координат q_1, q_2, q_3 выбираем углы поворота входных звеньев B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 . Упругость приводов учитываем заданием в приводных кинематических парах восстанавливающих пар сил с коэффициентом жёсткости c . Для составления дифференциальных уравнений сво-

бодных колебаний манипулятора используем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\Pi = c(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)/2$, $T = (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + I\dot{\varphi}^2)/2$ – соответственно потенциальная и кинетическая энергия системы; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}$ – проекции скорости центра масс выходного звена на оси координат и его угловая скорость.

Вектор скоростей выходного звена \dot{u} и вектор обобщённых скоростей \dot{q} связаны между собой соотношением:

$$\dot{u} = Y\dot{q}, \quad (2)$$

где $\dot{u} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi})^T$; $\dot{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$; Y – матрица Якоби, $Y = A^{-1}B$,

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix};$$

$$B = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix};$$

F_i – функции, связывающие в неявной форме обобщённые координаты и перемещения выходного звена,

$$F_i = (x_{A_i} - x_{B_i} - L \cos q_i)^2 + (y_{A_i} - y_{B_i} - L \sin q_i)^2, i = 1, 2, 3,$$

где, в частности, при $i = 1$ имеем $x_{A_1} = x + R_1 \sin \varphi$; $y_{A_1} = y - R_1 \cos \varphi$.

Принимаем радиусы $R_1 = 0,1$ м и $R_2 = 0,2$ м, длины стержней $L = 0,15$ м, координаты точек B_1, B_2, B_3 соответственно $(0; -0,2), (0,173; 0,1), (-0,173; 0,1)$, точек $A_1, A_2,$

A_3 соответственно $(0; -0,1), (0,0866; 0,05), (-0,0866; 0,05)$. Тогда матрицы A, B и Y имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -0,2828 & 0,100 & -0,2828 \\ 0,0548 & -0,2950 & -0,2829 \\ 0,2282 & 0,1949 & -0,2829 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -0,02828 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02829 & 0 \\ 0 & 0 & -0,02829 \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0,0592 & -0,0115 & -0,0478 \\ -0,021 & 0,0618 & -0,0408 \\ 0,3334 & 0,3333 & 0,3333 \end{pmatrix}.$$

Подставив значения величин с учётом выражения (2) в уравнение (1), получим в матричной форме систему дифференциальных уравнений свободных колебаний манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями в горизонтальной плоскости:

$$M\ddot{q} + Cq = 0, \quad (3)$$

$$M = 10^{-3} \begin{pmatrix} 5,058 & -0,8676 & -0,8616 \\ -0,8674 & 5,062 & -0,8606 \\ -0,8618 & -0,8608 & 5,060 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Частные решения системы дифференциальных уравнений (3) ищем в виде

$$q_i = A_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (100000 - 5,058\omega^2)A_1 + 0,8676\omega^2 A_2 + 0,8616\omega^2 A_3 &= 0 \\ 0,8674\omega^2 A_1 + (100000 - 5,062\omega^2)A_2 + 0,8606\omega^2 A_3 &= 0 \\ 0,8618\omega^2 A_1 + 0,8608\omega^2 A_2 + (100000 - 5,060\omega^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Приравняв к нулю определитель, составленный из коэффициентов при A_1, A_2, A_3 , получим частотное уравнение

$$\omega^6 - 638 \cdot 10^2 \omega^4 + 130 \cdot 10^7 \omega^2 - 855 \cdot 10^{10} = 0. \quad (6)$$

Корнями частотного уравнения являются круговые частоты свободных колебаний.

Компьютерное моделирование. При построении компьютерных моделей для вычислительных экспериментов манипулятор представляется в трёхмерном пространстве системой твёрдых тел, образующих между собой подвижные соединения. В соответствии с требованиями программного комплекса «Универсальный механизм» принимаем, что все твёрдые тела в кинематической цепи механизма обладают ненулевыми инерционными параметрами, которые или задаются в виде массы и тензора инерции или вычисляются в программе по созданным графическим образам.

Каждое промежуточное упругое звено (стержень) в кинематической цепи манипулятора рассматривается как совокупность n абсолютно твёрдых тел, образующих между собой четырёхподвижные соединения. Каждое такое соединение накладывает на относительное движение тел две геометрические связи, запрещающие линейные перемещения в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня. В

где $\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3)^T$, $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, M и C – соответственно матрицы инерционных и упругих коэффициентов.

При массе платформы $m = 1$ кг, моменте инерции $I = 0,01$ кг·м² и коэффициентах жёсткости приводов $c = 100$ Н·м матрицы M и C имеют вид

Подставив решения (4) в уравнения (3), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_1, A_2, A_3 :

четырёхподвижное соединение по каждой обобщённой координате i введён линейный упругий элемент с коэффициентом жёсткости c_i . Коэффициентам жёсткости присваиваем следующие значения:

$$c_1 = c_2 = c_{и}, c_3 = c_{к}, c_4 = c_{п}.$$

Коэффициенты крутильной $c_{к}$, продольной $c_{п}$ и изгибной $c_{и}$ жёсткости рассчитываются по известным формулам

$$c_{к} = \frac{GJ_p}{l}, c_{п} = \frac{ES}{l}, c_{и} = \frac{EJ}{l}, \quad (7)$$

где E и G – соответственно модуль упругости первого и второго рода материала стержня; S – площадь поперечного сечения стержня; l – длина абсолютно жёсткого элемента стержня, $l = L/n$; J_p, J – полярный и осевой моменты инерции поперечного сечения стержня.

В работе принято, что стержни могут быть выполнены из стали или из алюми-

ния, имеют круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение.

Для круглого сечения диаметром D

$$D_{cp} = \frac{D+d}{2}, S = \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}, J = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right), J_p = 2J. \quad (9)$$

Масса m_i и главные центральные моменты инерции каждого абсолютно жёст-

$$m_i = \rho S l, I_{yi} = I_{zi} = \frac{m_i l^2}{12}, I_{xi} = \frac{m_i D_{cp}^2}{4}, \quad (10)$$

где ρ – плотность материала стержня; x – ось местной системы координат, проходящей вдоль стержня. Для стержня с круглым поперечным сечением момент инерции $I_{xi} = m_i D^2/8$. Принимаем для стали $E = 210$ ГПа, $G = 80$ ГПа, $\rho = 7800$ кг/м³; для алюминия – $E = 71$ ГПа, $G = 26$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³.

В тестовом примере программного комплекса «Универсальный механизм» при расчёте собственных частот изгибных колебаний консольная балка разделялась на десять подвижных частей, и первые пять собственных частот определялись с относительной погрешностью менее 2,5 % по сравнению с аналитическим решением [12]. Поэтому принимаем в компьютерной модели каждого упругого стержня в кинематической цепи механизма $n = 10$.

Анализ собственной формы на каждой собственной частоте выполняем с использованием анимационного окна программы, в котором изображается движение графического образа механизма.

В работе все расчёты с использованием программного комплекса «Универсальный механизм» выполняются для двух геометрически подобных кинематических схем манипулятора (см. рис. 1). Одна схема выполнена с короткими стержнями ($L = 0,15$ м), а другая – с длинными ($L = 1,5$ м). В кинематических схемах для устранения избыточных связей согласно [13, 14] шарниры B_i и C_i описаны как вращательные кинематические пары, а шарниры A_i – как трёхподвижные сферические пары. На основе этих кинематических схем построены восемь компьютерных моделей манипулятора, отличающихся геометрическими,

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, J = \frac{\pi D^4}{64}, J_p = 2J. \quad (8)$$

Для трубки с внешним диаметром D и внутренним диаметром d

кого i -го элемента стержня в виде трубки определяются по известным формулам

упругими и инерционными свойствами звеньев. Модели № 1 и № 2 применяются для расчёта манипуляторов с абсолютно жёсткими невесомыми стержнями и сравнения численного решения с аналитическим, модели № 3 и № 4 используются для анализа спектра собственных частот и оценки влияния на собственные частоты манипулятора коэффициентов жёсткости привода, модели № 5-8 применяются для анализа влияния упругих и инерционных свойств стержней. Во всех компьютерных моделях для выходного звена задаётся масса m и тензор инерции в виде диагональной матрицы T , для которой элементы $t_{11} = t_{22} = t_{33} = I$.

Модель № 1 соответствует плоской расчётной схеме с короткими стержнями, принятой в аналитическом решении: для выходного звена $m = 1$ кг, $I = 0,01$ кг·м²; коэффициенты жёсткости приводов одинаковы $c = 100$ Н·м; стержни абсолютно жёсткие малоинерционные с пренебрежимо малыми массой (10^{-7} кг) и тензором инерции (10^{-9} кг·м²).

Модель № 2 соответствует модели № 1, но кинематическая схема выполнена с длинными стержнями.

Модель № 3 выполнена на основе модели № 1, но имеет следующие отличия: стержни манипулятора выполнены в виде малоинерционных алюминиевых трубок диаметрами $D = 26$ мм и $d = 12$ мм, коэффициенты жёсткости приводов варьируются от 1 до $1 \cdot 10^{10}$ Н·м.

Модель № 4 выполнена на основе модели № 2, но имеет следующие отличия: стержни выполнены в виде алюминиевых трубок с диаметрами $D = 50$ мм и $d =$

30 мм. Для каждого абсолютно жёсткого элемента стержня длиной $l_i = 0,15$ м задаются масса $m_i = 0,509$ кг и ненулевые диагональные элементы тензора инерции T : $t_{11} = I_x = 2,04 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $t_{22} = I_y = 9,54 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $t_{33} = I_z = 9,54 \cdot 10^{-4}$ кг·м², для выходного звена $m = 2$ кг и $I = 0,01$ кг·м², коэффициенты жёсткости приводов варьируются от 1 до $1 \cdot 10^{10}$ Н·м.

Модель № 5 выполнена на основе модели № 1, имеет следующие отличия: $c = 1000$ Н·м, малоинерционные алюминиевые стержни манипулятора выполнены со сплошным круглым сечением

Результаты

Сравнение собственных частот и форм для разных моделей. Для аналитической модели манипулятора, решая частотное уравнение (6), получим круговые частоты: $\omega_1 = 124,9$ рад/с, $\omega_2 = 135,6$ рад/с, $\omega_3 = 172,7$ рад/с. Собственные частоты колебаний $f_{1A} = 19,89$ Гц, $f_{2A} = 21,59$ Гц, $f_{3A} = 27,50$ Гц.

Для компьютерной модели № 1 собственные частоты манипулятора с малоинерционными стержнями $f_1 = f_x = 20,59$ Гц, $f_2 = f_y = 20,74$ Гц, $f_3 = f_{\varphi z} = 27,53$ Гц. Здесь и далее $f_x, f_y, f_{\varphi z}$ – собственные частоты, ко-

диаметром D , который варьируется от 8 до 44 мм.

Модель № 6 аналогична модели № 5, но массы и тензоры инерции стержней вычисляются в программе автоматически.

Модель № 7 выполнена на основе модели № 2, но имеет следующие отличия: стальные малоинерционные стержни имеют круглое поперечное сечение диаметром D , который варьируется от 20 до 100 мм, для выходного звена $m = 2$ кг и $I = 0,1$ кг·м², $c = 10000$ Н·м.

Модель № 8 аналогична модели № 7, но инерционные параметры стержней вычисляются в программе автоматически.

торым соответствуют собственные формы $x, y, \varphi z$. На собственной форме x выходное звено совершает возвратно-поступательное движение в горизонтальной плоскости с частотой f_x с максимальной амплитудой вдоль оси x неподвижной системы координат. Аналогично, на собственной форме y выходное звено колеблется с частотой f_y с максимальной амплитудой вдоль оси y . На собственной форме φz выходное звено колеблется вокруг вертикальной оси z . Максимальная относительная погрешность численного решения

$$\Delta_f = (f_{2A} - f_2)100\% / f_{2A} = (21,59 - 20,74)100\% / 21,59 = 3,9\%.$$

Для компьютерной модели № 2, имеющей геометрически подобную кинематическую схему с увеличенными в 10 раз длинами стержней, собственные частоты $f_x = 2,059$ Гц и $f_y = 2,074$ Гц уменьшились в 10 раз, а частота $f_{\varphi z} = 27,53$ Гц не изменилась.

Увеличение в 10 раз момента инерции I , при сохранении без изменения остальных параметров компьютерной модели № 2, привело к уменьшению в 3,16 раза частоты $f_{\varphi z} = 8,71$ Гц. Остальные частоты $f_x = 2,059$ Гц и $f_y = 2,074$ Гц остались без изменения, что подтверждает независимость поступательного и вращательного движения выходного звена на собственных формах для рассмотренного положения механизма с малоинерционными жёсткими звеньями.

Для компьютерной модели № 3 с упругими стержнями при $c = 100$ Н·м общее число собственных частот равно 219. Из них первые шесть низших собственных частот имеют значения: $f_x = 20,58$ Гц, $f_y = 20,85$ Гц, $f_{\varphi z} = 27,51$ Гц, $f_{\varphi x} = 137,7$ Гц, $f_{\varphi y} = 138,0$ Гц, $f_z = 195,1$ Гц, которые существенно отличаются от ближайшей большей частоты $f_7 = 35565$ Гц. Здесь и далее $f_{\varphi x}$ и $f_{\varphi y}$ – собственные частоты, которым соответствуют собственные формы φx и φy , на которых выходное звено имеет максимальные амплитуды колебаний соответственно вокруг осей x и y . На собственной форме z выходное звено совершает возвратно-поступательное движение с частотой f_z вдоль оси z . Замена абсолютно жёстких стержней упругими привела к появлению собственных частот и форм, на кото-

рых выходное звено колеблется в вертикальной плоскости. Колебания выходного звена в вертикальной и горизонтальной плоскостях на собственных формах разделены. Разделены также вращательные и поступательные движения выходного звена в каждой плоскости, а колебания на собственных формах с близкими частотами f_x и f_y , а также $f_{\varphi x}$ и $f_{\varphi y}$ взаимосвязаны.

Для компьютерной модели № 4 с упругими инерционными стержнями при $c = 10000$ Н·м спектр первых девяти собственных частот более плотный чем в модели № 3: $f_x = 3,97$ Гц, $f_y = 3,98$ Гц, $f_{\varphi z} = 4,56$ Гц, $f_z = 8,56$ Гц, $f_{\varphi x} = 10,03$ Гц, $f_{\varphi y} = 10,04$ Гц, $f_{z2} = 13,9$ Гц, $f_{\varphi x2} = 14,569$ Гц, $f_{\varphi y2} = 14,572$ Гц. Далее следуют три частоты 52,8 Гц, 53,7 Гц и 53,8 Гц, на собственных формах которых выходное звено практически неподвижно, а стержни совершают изгибные колебания в горизонтальной плоскости. На следующих трёх собственных формах с частотами $f_{\varphi z2} = 64,8$ Гц, $f_{x2} = 66,2$ Гц, $f_{y2} = 66,3$ Гц выходное звено колеблется в горизонтальной плоскости вследствие изгиба стержней и с меньшими амплитудами, чем на частотах $f_{\varphi z}$, f_x , f_y . В конце спектра, начиная с частоты $f_{175} = 5997$ Гц и заканчивая $f_{219} = 7126$ Гц, собственные формы определяются продольными колебаниями стержней.

Численные эксперименты с варьированием коэффициента жёсткости привода. В процессе вычислительных экспериментов на модели № 3 коэффициенты жёсткости привода изменялись от 1 до $1 \cdot 10^{10}$ Н·м. Установлено, что собственные частоты f_z , $f_{\varphi x}$, $f_{\varphi y}$, соответствующие собственным формам с колебаниями выходного звена в вертикальной плоскости, не зависят от величины коэффициента жёсткости привода.

Собственные частоты f_x , f_y , $f_{\varphi z}$, на которых выходное звено колеблется в горизонтальной плоскости, зависят от величины коэффициента жёсткости привода аналогичным образом (табл. 1). Полулогарифмический график $f_x(\lg c)$ (рис. 2) имеет три участка с различной кривизной, что можно объяснить свойствами последовательного соединения двух упругих элементов: привода и стержней, связывающих

выходное звено и неподвижное основание в каждой из трёх упругих связей. Общая податливость последовательного соединения элементов есть сумма податливостей привода и стержней. На первом участке, для которого значения коэффициента жёсткости привода малы $c \leq 1000$ Н·м ($\lg c \leq 3$), суммарная податливость системы определяется податливостью привода, а податливость стержней пренебрежимо мала. Это объясняет, почему при $c = 100$ Н·м в модели № 3 с упругими звеньями получены значения собственных частот $f_x = 20,58$ Гц, $f_y = 20,85$ Гц, $f_{\varphi z} = 27,51$ Гц, мало отличающиеся от значений для модели № 1 с жёсткими звеньями. На третьем участке при $\lg c \geq 6$ податливость привода пренебрежимо мала по сравнению с податливостью стержней, поэтому дальнейшее увеличение жёсткости и, соответственно, уменьшение податливости привода не изменяет собственные частоты колебаний. На промежуточном втором участке податливости стержней и привода сопоставимы. Для сравнения, коэффициенты жёсткости в соединении двух абсолютно жёстких элементов упругого стержня в соответствии с формулами (7), (9) $c_{II} = 1,01 \cdot 10^5$ Н·м, $c_K = 7,42 \cdot 10^4$ Н·м, $c_{II} = 1,98 \cdot 10^9$ Н/м.

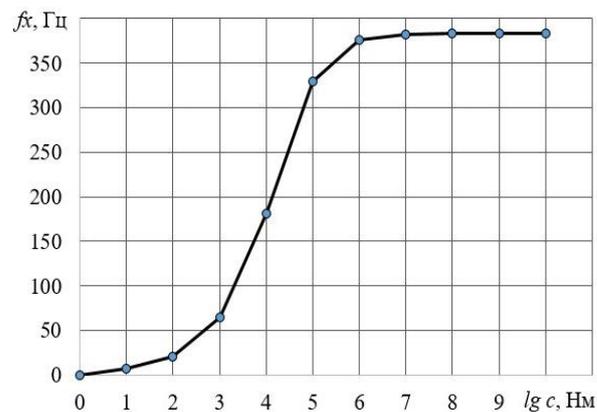


Рис. 2. Зависимость $f_x(\lg c)$
Fig. 2. Dependence of $f_x(\lg c)$

Для манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями собственные частоты постоянно растут с ростом коэффициента жёсткости привода. Например, при $c = 1 \cdot 10^9$ Н·м для модели № 1 $f_x = 65107$ Гц, $f_y = 65582$ Гц, $f_{\varphi z} = 87073$ Гц. Второй и третий участки графика $f_x(\lg c)$ в этом случае отсутствуют.

Аналогичная картина сохраняется и для модели № 4 при других значениях геометрических, инерционных и упругих параметров промежуточных звеньев. Низшие собственные частоты с собственными формами, соответствующими колебаниям выходного звена в вертикальной плоско-

сти, равны $f_z = 8,56$ Гц, $f_{\varphi x} = 10,03$ Гц, $f_{\varphi y} = 10,04$ Гц, не зависят от величины коэффициента жёсткости привода. Значения собственных частот для двух собственных форм с колебаниями выходного звена в горизонтальной плоскости приведены в табл. 1.

Таблица 1
Значения низших собственных частот f для моделей № 3 и № 4, Гц

Table 1

Values of the lowest natural frequencies f for models No. 3 and No. 4, Hz

f	Собственная форма	Номер модели №	lg c , Н·м									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_x	x	3	6,91	20,6	64,2	181	330	376	382	383	383	383
		4	0,15	0,434	1,36	3,97	7,89	9,36	9,56	9,58	9,58	9,58
$f_{\varphi z}$	φz	3	8,22	27,5	86,0	243	442	504	512	513	513	513
		4	0,16	0,50	1,60	4,60	9,10	10,9	11,2	11,2	11,2	11,2

Численные эксперименты с варьированием диаметра сечения стержней.

На первом этапе для оценки влияния только упругих свойств стержней выполняем расчёты на модели № 5 при $c = 1000$ Н·м для разных значений диаметра D коротких алюминиевых стержней круглого поперечного сечения с пренебрежимо малыми массой и тензором инерции. В соответствии с формулами (7), (8) при увеличении диаметра увеличиваются коэффициенты изгибной, крутильной и продольной жёст-

кости. Массы и тензоры инерции звеньев, при этом, остаются без изменения. На втором этапе для оценки влияния инерционных свойств стержней выполняем аналогичные расчёты на модели № 6, для которой масса и тензор инерции каждого жёсткого элемента стержня автоматически рассчитываются в программе по формулам (10) и зависят от диаметра. Результаты вычислительного эксперимента для моделей № 5 и № 6 приведены в табл. 2.

Таблица 2
Значения низших собственных частот f для моделей № 5 и № 6, Гц

Table 2

Values of the lowest natural frequencies f for models No. 5 and No. 6, Hz

f	Собственная форма	Номер модели №	Диаметр стержня D , мм									
			8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
f_x	x	5	32,5	51,6	59,7	62,7	63,9	64,5	64,7	64,9	65,0	65,0
		6	31,4	47,6	52,1	51,2	48,7	45,8	42,8	40,0	37,4	35,0
$f_{\varphi z}$	φz	5	43,6	69,1	80,0	84,0	85,6	86,3	86,7	86,8	87,0	87,0
		6	41,4	61,6	66,0	63,6	59,4	54,9	50,6	46,8	43,3	40,2
f_z	z	5	18,3	42,5	75,6	118	170	232	302	383	473	572
		6	18,7	41,8	73,2	112	150	211	268	330	394	462
$f_{\varphi x}$	φx	5	13,4	30,0	53,4	83,4	120	164	214	270	334	404
		6	13,3	29,8	52,5	81,3	116	156	200	250	303	359

Значения частот f_x , f_y и $f_{\varphi z}$ зависят от диаметра D аналогичным образом. Значения частоты f_x при невесомых стержнях

(рис. 3, график 1) асимптотически приближаются к максимальному значению 65,1 Гц, полученному при $c = 1000$ Н·м для

модели № 1 с абсолютно жёсткими звеньями. Вид кривой $f_x(D)$ для невесомых стержней также, как и рис. 2, объясняется сложением податливостей привода и стержней.

Для собственных частот $f_z, f_{\varphi x}, f_{\varphi y}$ с собственными формами, на которых выходное звено колеблется в вертикальной плоскости, зависимости от диаметра D при невесомых стержнях существенно отличаются, так как эти колебания не зависят от жёсткости привода (рис. 4, график 1). При увеличении диаметра стержня в два раза, с 12 мм до 24 мм, коэффициенты изгибной и крутильной жёсткости стержней увеличились по формулам (7) и (8) в 16 раз, а собственная частота f_z увеличилась в четыре раза с 42,5 Гц до 170 Гц, что хорошо согласуется с теорией колебаний. Кривая 1 на рис. 4 близка к параболе.

Введение в расчётную схему масс звеньев приводит к снижению значений собственных частот. Вид зависимостей $f_x(D)$ и $f_z(D)$ с учётом масс звеньев (график 2, рис. 3, 4) можно объяснить тем, что при малых значениях диаметра D масса выходного звена для модели № 6 существенно превышает суммарную массу стержней и определяет массу динамической системы, как в модели № 5 (график 1, рис. 3, 4). Например, при $D = 20$ мм суммарная масса шести стержней составляет 0,76 кг, а масса выходного звена – 1 кг. При больших значениях диаметра D масса системы определяется уже суммарной массой стержней, которая пропорциональна квадрату диаметра стержня, поэтому графики 1 и 2 на рис. 3, 4 расходятся с ростом D . Начиная с $D = 24$ мм, график 2 на рис. 3 близок к гиперболе, а график 2 на рис. 4 – к прямой.

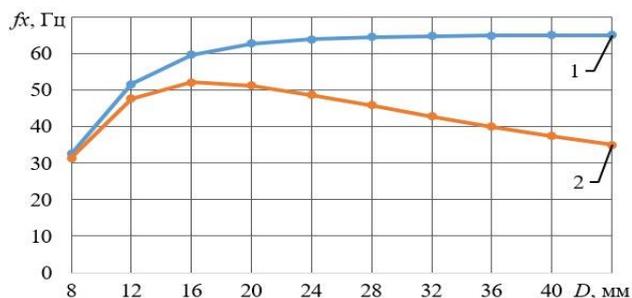


Рис. 3. Зависимость $f_x(D)$ для моделей № 5 и № 6: 1 – без учёта масс стержней; 2 – с учётом масс стержней
Fig. 3. The dependence of $f_x(D)$ for models No. 5 and No. 6: 1 – without taking into account the masses of the rods; 2 – taking into account the masses

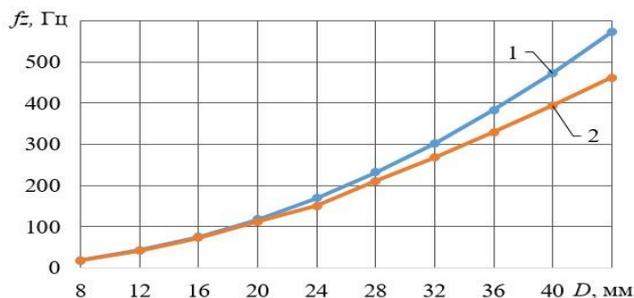


Рис. 4. Зависимость $f_z(D)$ для моделей № 5 и № 6: 1 – без учёта масс стержней; 2 – с учётом масс стержней
Fig. 4. Dependence $f_z(D)$ for models No. 5 and No. 6: 1 – without taking into account the masses of the rods; 2 – taking into account the masses

Для моделей № 7 и № 8 с длинными стальными стержнями результаты вычислений приведены в табл. 3.

Значения низших собственных частот для моделей № 7 и № 8, Гц

Таблица 3

Table 3

Values of the lowest natural frequencies for models No. 7 and No. 8, Hz

f	Собственная форма	Номер модели №	Диаметр стержня D , мм								
			20	30	40	50	60	70	80	90	100
f_x	x	7	7,68	11,8	13,5	14,1	14,4	14,5	14,5	14,6	14,6
		8	2,76	2,90	2,49	2,08	1,76	1,53	1,34	1,19	1,08
$f_{\varphi z}$	φz	7	45,9	70,8	80,7	84,3	85,7	86,3	86,6	86,8	86,9
		8	3,26	3,28	2,77	2,30	1,95	1,68	1,47	1,31	1,18
f_z	z	7	4,59	10,3	18,4	28,7	41,3	56,2	73,4	92,9	115
		8	2,86	4,8	6,70	8,56	10,4	12,2	14,0	15,8	17,6
$f_{\varphi x}$	φx	7	14,5	32,6	58,0	90,6	131	178	232	294	362
		8	3,46	5,27	7,06	8,85	10,6	12,4	14,2	16,0	17,7

Результаты расчёта хорошо согласуются с данными для моделей № 5 и № 6. Например, для модели № 7 при увеличении диаметра D стержня в 2 раза (с 20 мм до 40 мм) собственная частота f_z с собственной формой z увеличилась с 4,59 Гц до 18,4 Гц – в 4 раза, а коэффициенты изгибной и крутильной жёсткости, согласно формулам (7), (8), увеличились в 16 раз. Так как масса системы не меняется, то собственная частота на собственной форме

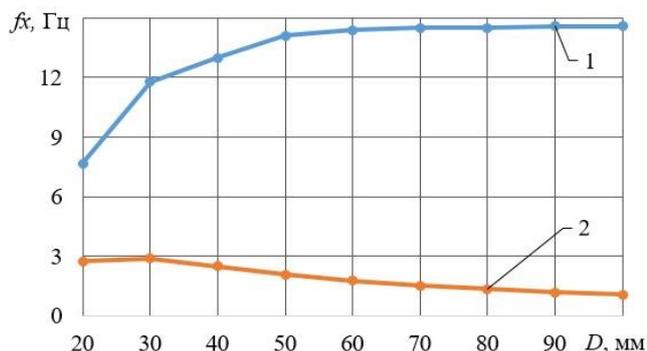


Рис. 5. Зависимость $f_x(D)$ для моделей № 7 и № 8: 1 – без учёта масс стержней; 2 – с учётом масс
 Fig. 5. The dependence of $f_x(D)$ for models No. 7 and No. 8: 1 – without taking into account the masses of the rods; 2 – taking into account the masses

Заключение

Построена аналитическая модель плоского манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы, а также его компьютерные модели в программном комплексе «Универсальный механизм» для расчёта собственных частот и форм малых колебаний.

Определены три собственные частоты f_x , f_y , $f_{\varphi z}$ колебаний манипулятора с абсолютно жёсткими невесомыми промежуточными звеньями в горизонтальной плоскости движения механизма аналитическим и численным методом. Для рассмотренной конфигурации плоского манипулятора поступательное и вращательное движения выходного звена на собственных формах разделены и не зависят друг от друга. Допустимая разность аналитического и численного решений подтверждает адекватность принятых расчётных схем и алгоритмов.

z должна увеличиться примерно в 4 раза, что и наблюдается.

В модели № 8 в отличие от модели № 6 суммарная масса стержней превышает массу выходного звена уже при небольших значениях диаметра, так как стержни стальные и длинные. Поэтому графики 1 и 2 (рис. 5, 6) с ростом диаметра расходятся сразу, начиная с $D = 20$ мм. Кривая 2 на рис. 6 – прямая, а кривая 2 на рис. 5, начиная с $D = 50$ мм, близка к гиперболе.

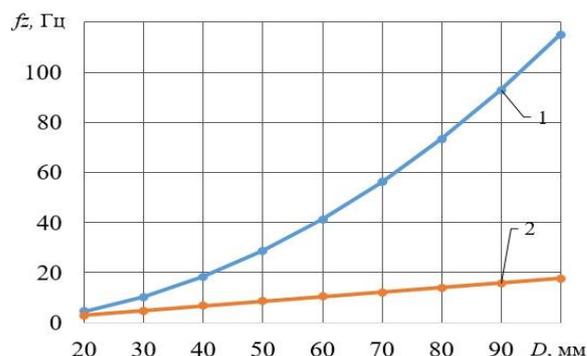


Рис. 6. Зависимость $f_z(D)$ для моделей № 7 и № 8: 1 – без учёта масс стержней; 2 – с учётом масс
 Fig. 6. Dependence $f_z(D)$ for models No. 7 and No. 8: 1 – without taking into account the masses of the rods; 2 – taking into account the masses

Замена абсолютно жёстких промежуточных звеньев упругими стержнями привела к появлению собственных частот f_z , $f_{\varphi x}$, $f_{\varphi y}$ и соответствующих им форм, на которых выходное звено колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости движения манипулятора. Поэтому, для анализа собственных колебаний плоского манипулятора недостаточно использовать плоскую кинематическую схему с абсолютно жёсткими звеньями. Установлено, что колебания выходного звена в вертикальной и горизонтальной плоскостях на собственных формах разделены. Учёт инерционных свойств упругих промежуточных звеньев привёл к появлению собственных частот и форм в нижней части спектра, на которых выходное звено совершает те же движения, что и на более низких частотах, но с меньшей амплитудой.

В результате вычислительных экспериментов с использованием разработанных компьютерных моделей определены зависимости значений собственных частот, соответствующих шести первым неизменным формам колебаний, от коэффициента жёсткости привода и от диаметра D стержней круглого поперечного сечения. Установлено, что для манипулятора с упругими стержнями значения частот $f_x, f_y, f_{\varphi z}$ зависят от соотношения податливостей привода и стержней, образующих последовательное соединение, и с ростом коэффициента жёсткости привода не увеличиваются до бесконечности, как при абсолютно жёстких звеньях, а асимптотически приближаются к постоянным значениям парциальных частот упругих колебаний стержней. Поэтому введение упругих муфт в привод может существенно снизить собственные частоты колебаний манипулятора в горизонтальной плоскости. Значения собственных частот $f_z, f_{\varphi x}, f_{\varphi y}$ не зависят от коэффициента жёсткости

привода, определяются упругими и инерционными свойствами стержней и увеличиваются с ростом диаметра невесомых стержней по квадратичному закону.

Влияние масс упругих звеньев на значения собственных частот определяется соотношением инерционных параметров выходного звена и стержней и видом собственных форм. В случае, когда масса системы определяется массой стержней, то значения частот $f_x, f_y, f_{\varphi z}$ обратно пропорциональны диаметру D , а значения частот $f_z, f_{\varphi x}, f_{\varphi y}$ – прямо пропорциональны.

В результате исследования спектра собственных частот, сравнения значений коэффициентов изгибной, крутильной и продольной жёсткости в подвижных соединениях, анализа зависимости значений собственных частот от диаметра стержней установлено, что продольная жёсткость стержней не оказывает влияния на значения собственных частот в нижней части спектра.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Merlet J.P. *Parallel Robots*. 2nd edition. Dordrecht: Springer, 2006. 417 p.
2. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике. *Доклады Академии наук*. 2014;459(4):428. DOI 10.7868/S086956521434009X.
3. Маслов А.Н. Позиционирование нежесткого звена робота-манипулятора с учетом ограничений на управление. *Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ*. 2011;2:5-9.
4. Антонов А.В., Глазунов В.А. Влияние упругих сил на точность движения манипулятора параллельной структуры. *Экстремальная робототехника*. 202;1(1):47-55.
5. Хейло С.В., Ширинкин М.А., Глазунов В.А. Определение собственных частот колебаний манипулятора параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2011;4(333):120-124.
6. Носова Н.Ю. Разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы: специальность 05.02.18 «Теория механизмов и машин»: дис. на соискание учёной степени канд. техн. наук / Носова Наталья Юрьевна; Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук. Москва, 2021. 152 с. Библиогр.: с. 119-130.
7. Демидов С.М., Артеменко Ю.Н., Глазунов В.А. и др. Анализ динамических свойств механизмов параллельной структуры. *Машиностроение и инженерное образование*. 2012;1(30):36-41.
8. Скворцов С.А., Лысогорский А.Е., Глазунов В.А. Динамический анализ механизма параллельной структуры, выполняющего поступательные перемещения. *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технология*. 2015;2(15):70-79.
9. Глазунов В.А., Хейло С.В., Костюков А.М. Исследование колебаний механизма параллельной структуры. *Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины*: сб. тр. XII междунар. конф.: в 2 частях. Курск, 18–20 мая 2016 года. Курск: Юго-Западный государственный университет. 2016. С. 23-28.
10. Pogorelov D. Y. On numerical methods of modeling large multibody systems. *Mechanism and Machine Theory*. 1999;34(5):791-800. DOI 10.1016/S0094-114X(98)00055-X.
11. Погорелов Д.Ю., Толстошеев А.К., Ковалёв Р.В. Динамический анализ и синтез механизмов с использованием программы UM. Брянск: Изд-во Брянского государственного технического университета, 1997. 46 с.
12. Универсальный механизм 9. Руководство пользователя: начинаем работать. 2021. 75 с. URL: http://www.universalmecanism.com/download/90/rus/g_s_um.pdf (дата обращения: 30.05.2022).
13. Толстошеев А.К., Татаринцев В.А. Структурный анализ механизмов роботов-станков с параллельной кинематикой. *Вестник Брянского государственного университета*.

ственного технического университета. 2017;1(54):33-43. DOI 10.12737/24889.

14. Ширинкин М.А. Структурный анализ пространственных механизмов параллельной структуры с

четырьмя и шестью степенями свободы. *Машиностроение и инженерное образование*. 2011;2:17-21.

REFERENCES

1. Merlet JP. *Parallel Robots*. 2nd ed. Dordrecht: Springer; 2006.
2. Ganiev RF, Glazunov VA. Manipulation mechanisms of parallel structure and their applications in modern technology. *Dokladi Akademii Nauk*. 2014;459(4):428. DOI 10.7868/S086956521434009X.
3. Maslov AN. Positioning of non-rigid link of the robot manipulator taking into account control restrictions. *Vestnik Moscovskogo Energeticheskogo Instituta. Vestnik MEI*. 2011;2:5-9.
4. Antonov AV, Glazunov VA. Influence of elastic forces on the movement accuracy of the parallel manipulator. *Extreme Robotics*. 202;1(1):47-55.
5. Heylo SV, Shirinkin MA, Glazunov VA. Determination of natural oscillation frequencies of a parallel manipulator. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Textile Industry Technology*. 2011;4(333):120-124.
6. Nosova NYu. Development and study of spatial mechanisms of a parallel structure with articulated parallelograms with various number of degrees of freedom [dissertation]. [Moscow (RF)] Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences; 2021.
7. Demidov SM, Artemenko YuN, Glazunov VA. Analysis of dynamic properties of parallel mechanisms. *Mashinostroenie I Inzhenernoe Obrazovanie*. 2012;1(30):36-41.
8. Skvortsov SA, Lysogorsky AE, Glazunov VA. Dynamical analysis of parallel structure mechanism executing translational motions. *Proceedings of the Southwestern State University. Series: Engineering and Technologies*. 2015;2(15):70-79.
9. Glazunov VA, Heylo SV, Kostyukov AM. Study of oscillations of parallel structure mechanism. *Collection of Scientific Papers of the XII International Conference, May 18-20, 2016: Vibration Technologies, Mechatronics and Controlled Machines; Southwest State University. Kursk; 2016. p. 23-28.*
10. Pogorelov DY. On numerical methods of modeling large multibody systems. *Mechanism and Machine Theory*. 1999;34(5):791-800. DOI 10.1016/S0094-114X(98)00055-X.
11. Pogorelov DYu, Tolstosheev AK, Kovalev RV. *Dynamic analysis and synthesis of mechanisms using UM programs*. Bryansk: Publishing House of Bryansk State Technical University; 1997.
12. Universal mechanism 9. *User Manual: Getting started* [Internet]; 2021 [cited 2022 May 30]. Available from: http://www.universalmechanism.com/download/90/rus/g_s_um.pdf
13. Tolstosheev AK, Tatarintsev VA. Structural analysis of robot machine mechanisms with parallel kinematics. *Bulletin of Bryansk State Technical University*. 2017;1(54):33-43. DOI 10.12737/24889.
14. Shirinkin MA. Structural analysis of spatial mechanisms of a parallel structure with four and six degrees of freedom. *Mashinostroenie I Inzhenernoe Obrazovanie*. 2011;2:17-21.

Информация об авторе:

Толстошеев Андрей Константинович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Трубопроводные транспортные системы» Брянского

государственного технического университета, тел. 8-953-293-04-51,

Tolstosheev Andrey Konstantinovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the De-

partment of Pipeline Transport Systems at Bryansk State Technical University, phone: 8-953-293-04-51.

**Статья опубликована в режиме Open Access.
Article published in Open Access mode.**

Статья поступила в редакцию 06.07.2022; одобрена после рецензирования 23.09.2022; принята к публикации 21.11.2022. Рецензент – Куц В.В., доктор технических наук, профессор кафедры «Машиностроительные технологии и оборудование» Юго-Западного государственного университета, член редсовета журнала «Транспортное машиностроение»

The article was submitted to the editorial office on 06.07.2022; approved after review on 23.09.2022; accepted for publication on 21.11.2022. The reviewer is Kuts V.V, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Engineering Technologies and Equipment at the Southwest State University, member of the Editorial Board of the journal *Transport Engineering*.