

Научноёмкие технологии в машиностроении. 2022. №11 (137). С. 39-48.

Science intensive technologies in mechanical engineering. 2022. №11 (137). P. 39-48.

Научная статья

УДК 621.9.06; 519.176

doi:10.30987/2223-4608-2022-11-39-48

Математические методы оптимизации режимов движения манипулятора в автоматизированном технологическом процессе

Любовь Николаевна Иванова¹, ст. преподаватель,
Сергей Евгеньевич Иванов², к.ф.-м.н.

¹ Санкт-Петербургский морской государственный технический университет,
² Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

¹ 45is@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6880-0897>

² serg_ie@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2366-9458>

Аннотация. Рассмотрена актуальная научная задача оптимизации режимов движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Представлен метод оптимизации траектории движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Разработанный метод оптимизации траектории используется для повышения быстродействия и оптимизации движения различных манипуляторов.

Ключевые слова: оптимизация движения, манипуляторы, технологический процесс, траектории движения

Для цитирования: Иванова Л.Н., Иванов С.Е. Математические методы оптимизации режимов движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе // Научноёмкие технологии в машиностроении. – 2022. – №11 (137). – С. 39-48. doi: 10.30987/2223-4608-2022-11-39-48.

Original article

Mathematical methods for optimizing manipulator movement modes in an automated technological process

Lubov N. Ivanova¹, senior lecturer,
Sergei E. Ivanov², Can. Sc. Physics and Mathematics

¹ St. Petersburg Maritime State Technical University,
² National Research University ITMO, Saint-Petersburg, Russia

¹ 45is@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6880-0897>

² serg_ie@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2366-9458>

Abstract. The paper considers an urgent scientific problem of optimizing the modes of movement of manipulators in an automated technological process. A method for optimizing the trajectory of movement of manipulators in an automated technological process is presented. The developed trajectory optimization method is used to increase the speed and optimize the movement of various manipulators.

Keywords: motion optimization, manipulators, technological process, motion trajectories

For citation: Ivanova L. N., Ivanov S. E. Mathematical methods for optimizing manipulator movement modes in an auto-mated technological process. / Science intensive technologies in Mechanical Engineering, 2022, no. 11 (137), pp. 39-48. doi: 10.30987/2223-4608-2022-11-39-48.

Введение

Рассматриваются актуальные производственные задачи повышения эффективности технологических операций и функционирования робототехнических систем, быстродействия, точности позиционирования, оптимизации траекторий манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Объектами исследования работы являются модели транспортных устройств-манипуляторов для перемещения заготовок деталей или изделий между технологическими операциями единого технологического процесса.

Предметом исследования являются методы повышения качественных характеристик моделей манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Целью работы является исследование моделей манипуляторов в технологическом процессе производства и разработка методов оптимизации режимов движения манипуляторов в автоматизированном производстве.

Рассмотрены нелинейные модели промышленных манипуляторов с шестью степенями свободы, представлен гибридный метод оптимизации траектории движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Метод позволяет повысить быстродействие и точность позиционирования манипуляторов. Разработанный метод оптимизации траектории используется для повышения быстродействия и оптимизации движения различных промышленных манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе. Критерий оптимальной траектории в рабочей зоне манипулятора при обходе препятствия обеспечивает минимальное время рабочего такта манипулятора.

Задачам исследования и оптимизации манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе посвящено множество современных научных работ. В работе [1] разрабатываются технологии реконфигурирования манипуляторов для автоматизации производственных линий и предлагается концепция самонастраиваемых навыков манипуляторов для производства. Навыки выполнения различных задач, полученные из текущих инструкций рабочего мастера, применяются к промышленным манипуляторам.

В работе [2] исследуется задача контроля

точности следования по заданной траектории для промышленного манипулятора. Предложенный в вышеуказанной работе метод применен для прогнозирующего контроллера следования траектории на манипуляторе KUKA LWR IV.

В работе [3] предложен интеллектуальный алгоритм определения траектории промышленного манипулятора, основанный на анализе альтернативных конфигураций при минимизации времени операции.

В работе [4] представлен метод Neural ODE и приложение нейронных сетей для управления манипулятором в недетерминированной среде при движении по траектории. Также представлена методика, позволяющая быстрее обучать нейронную сеть на ограниченных данных, полученных из реальной среды. Применение нейронных сетей показывает высокую точность исполнения траектории манипулятором, но требует на порядок больше вычислительных ресурсов по сравнению с гибридным методом ABI.

Однако в большинстве научных работ решаются задачи, влияющие на отдельные характеристики робототехнических систем. В данных научных работах исследование манипуляторов проводилось численными методами, в итоге получены количественные результаты. Применение численных методов для анализа нелинейных робототехнических систем не позволяет в полной мере получить качественные характеристики манипуляторов.

В работе для исследования нелинейных моделей манипуляторов применяются аналитические методы, которые позволяют получить качественные и количественные характеристики робототехнических систем в автоматизированном технологическом процессе.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи: разработка и исследование моделей манипуляторов в технологическом процессе производства; разработка гибридного метода ABI (Algorithm A* and B-spline Interpolation) [5] оптимизации траектории движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе.

В работе получены следующие результаты: разработаны и исследованы модели промышленных манипуляторов, предложен гибридный метод оптимизации траектории движения манипуляторов в автоматизированном производ-

стве. Решается прикладная задача повышения быстродействия, точности позиционирования промышленных манипуляторов и оптимизации траекторий движения манипуляторов в автоматизированном технологическом процессе.

Промышленные роботы состоят из манипулятора и системы программного управления рабочим органом манипулятора – захватным устройством (схват). Рассматривается задача оптимизации, как задача выбора оптимального пути в рабочей области манипулятора при обходе препятствия и минимального времени прохождения по траектории в автоматизированном технологическом процессе. Эти критерии не являются противоречивыми, т.к. в предположении равномерного движения с максимальной рабочей скоростью по оптимальной траектории обеспечивается минимальное время прохождения пути.

В промышленном производстве применяется огромное число специализированных манипуляторов различных компаний: 3D Robotics, ABB Robotics, Aethon, Alphabet, Inc. (Google), Amazon, Autonomous Solutions (ASI), CANVAS Technology, Carbon Robotics, Clearpath Robotics, Cyberdyne, Delphi Automotive, DJI, Ekso Bionics, EPSON Robots, FANUC Robotics, Fetch Robotics, Foxconn Technologies Group, GreyOrange, IAM Robotics, Intuitive Surgical, iRobot, Jibo, Kawasaki Robotics, Knightscope, KUKA, Lockheed Martin, Locus Robotics, Omron Adept Technologies Inc., Open Bionics, Rethink Robotics, ReWalk Robotics, Robotiq, Samsung, Savioke, Schunk, Seegrid, Siasun Robot & Automation Co.Ltd., SoftBank Robotics Corporation, Soil Machine Dynamics Ltd., Swisslog, Titan Medical, Toyota, ULC Robotics, Universal Robotics, Inc., Vecna Technologies, Verb Surgical, VEX Robotics, Yamaha Robotics, Yaskawa, Arkodim, Bit Robotics, Exoathlete, Ronavi Robotics, Eidos Robotics.

В производственном процессе промышленные манипуляторы выполняют следующие основные технологические операции: обслуживание станков, загрузка, разгрузка, транспортировка, механическая обработка, сборка, укладка и загрузка деталей, перенос деталей и заготовок, лазерная и точечная сварка, лазерная резка, литьё металла, штамповка, ковка и гибка, нанесение лакокрасочного и эмалевого покрытия распылением, упаковка и комплектование, контроль качества продукции.

Метод для определения пространственных и кинематических характеристик рабочего органа манипулятора

В разделе представлен метод для определения пространственных и кинематических характеристик рабочего органа манипулятора на основе метода матриц в кинематике и матричных уравнений Лагранжа второго рода в динамике. Метод позволяет определить рабочие оптимальные режимы движения манипулятора в роботизированном производстве, повысить быстродействие выполнения операции на производственной линии.

Применение метода позволяет оптимизировать число универсальных манипуляторов с программным управлением для различных технологических операций, а также позволяет увеличить производительность роботизированной производственной линии при сохранении качества технологического процесса. В промышленности широко используются на различных промышленных предприятиях манипуляторы с программным управлением без дорогостоящих сенсоров и элементов искусственного интеллекта.

Метод позволяет просчитать и оптимизировать последовательность движений звеньев манипулятора в роботизированном производстве для перемещения схвата манипулятора в заданную точку пространства. При этом возможно рассчитать и контролировать скорости и ускорения схвата манипулятора при перемещении, уменьшая время продолжительности такта манипулятора.

Для построения математической модели динамики манипулятора применяется матричный метод и матричные уравнения Лагранжа второго рода [6, 7]. В методе определяются матрицы перехода из одной локальной системы координат одного звена манипулятора к другой локальной системе координат последующего звена манипулятора. Специальным выбором локальных систем координат можно описать переход из одной локальной системы координат звена к другой посредством четырех параметров, а не шести, как в общем виде. Четыре параметра соответствуют повороту вокруг оси, двум перемещениям по осям и последующему повороту вокруг оси.

В работе представлен метод для расчета оптимального движения манипулятора. Пусть изучаемый манипулятор имеет n подвижных

звеньев. Вводятся обозначения начала локальной системы координат, связанной с i -звеном манипулятора O_i . Для глобальной системы координат, связанной с неподвижной системой координат, обозначается начало отсчета O_0 . Обозначаются обобщенные координаты для манипулятора за q_i ($i = 1, \dots, n$). Вводятся расширенный радиус вектор для точки в i -ой локальной системе координат:

$$A_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\alpha)\sin(\beta) & b\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) & b\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Матрица перехода $A_{i,i+1}$ связывает радиусы векторы координатных систем i и $i+1$ следующей формулой:

$$R_i = A_{i,i+1}R_{i+1}. \quad (2)$$

Матрица перехода из глобальной системы координат O_0 в локальную систему координат O_i определяется произведением матриц перехода:

$$A_{0i} = A_{01}A_{12} \dots A_{i-1,i}. \quad (3)$$

Таким образом определяется положение схвата манипулятора в глобальной системе координат.

Звенья манипулятора соединены цилиндрическими шарнирами и скользящими соединениями, в которых малым трением можно пренебречь.

Для составления дифференциальных уравнений движения манипулятора применяются матричные уравнения Лагранжа в виде:

$$LT + DP = Q, \quad (4)$$

где $L = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \dots, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]$ – вектор-строка операторов Лагранжа; T – суммарная кинетическая энергия всех звеньев манипулятора; Q – обобщенные силы для звеньев манипулятора; $DP = \left[\frac{\partial P}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q_i} \right]$ – вектор-строка производных от потенциальной энергии.

Определим кинетическую энергию для каждого звена манипулятора с применением матриц перехода по формулам:

$$T_i = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{A}_{0i} H_i \dot{A}_{0i}^T), \quad (5)$$

где H_i – матрица инерции звена:

$$R_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]^T.$$

Для перехода из начальной системы координат O_0 к локальной системе координат первого звена O_1 необходимо выполнить четыре действия: поворот вокруг оси на угол α , два перемещения по осям на величины a , b и последующий поворот вокруг оси на угол β .

Матрица перехода из одной координатной системы в последующую имеет вид:

$$H_i = \begin{bmatrix} J_{ixx} & J_{ixy} & J_{ixz} & m_i x_{Ci} \\ J_{iyx} & J_{iyy} & J_{iyz} & m_i y_{Ci} \\ J_{izx} & J_{izy} & J_{izz} & m_i z_{Ci} \\ m_i x_{Ci} & m_i y_{Ci} & m_i z_{Ci} & m_i \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где m_i – масса звена; $J_{ixx}, J_{iyy}, J_{izz}$ – компоненты тензора инерции звена относительно осей.

Координаты центра тяжести звена в локальной системе координат обозначены x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci} . Моменты инерции звена относительно осей обозначены: J_{xi}, J_{yi}, J_{zi} . Справедливы равенства для осевых моментов инерции:

$$J_{xi} = J_{iyy} + J_{izz}, J_{yi} = J_{ixx} + J_{izz}, J_{zi} = J_{ixx} + J_{iyy} \quad (7)$$

Определена суммарная кинетическая энергия (5) всех звеньев манипулятора.

Определена потенциальная энергия для сил тяжести каждого звена в виде:

$$P_i = -m_i G^T A_i C_i, \quad (8)$$

где $C_i = [x_{Ci} \ y_{Ci} \ z_{Ci} \ 1]^T$ – столбец координат центра тяжести звена; $G_i = [0 \ 0 \ -g \ 0]^T$ – столбец ускорения свободного падения.

Определяется суммарная потенциальная энергия (8) всех звеньев манипулятора.

Подстановкой общей кинетической, потенциальной энергий и обобщенных сил для звеньев в матричное уравнение Лагранжа (4) получена система дифференциальных уравнений движения промышленного манипулятора.

Для постановки задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений (4) заданы начальные условия для обобщенных координат и скоростей звеньев манипулятора. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений проводится классическим

численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений может строиться различными методами: линеаризации, усреднения, Крылова Боголюбова, Ван дер Поля, малого параметра, гармонического баланса, методом автономизации, возмущений Пуанкаре, методом припасовывания или сшивания при решении кусочно-линейных систем управления.

Для каждого метода решения систем дифференциальных уравнений известны свои ограничения. Методом автономизации аналитическое решение системы дифференциальных уравнений строится при условии малых нелинейных частей. Для применения метода автономизации проводят нормализацию системы и масштабирование на исследуемом промежутке времени для приведения нелинейных коэффициентов системы к малым величинам.

Полученное решение определяет обобщенные координаты, скорости и ускорения для манипулятора. Построенное аналитическое решение для системы отражает зависимости для обобщенных координат, скоростей и ускорений от обобщенных сил звеньев манипулятора. Используя эти зависимости, определены значения обобщенных сил звеньев, необходимые для перемещения схвата в конечную точку. С помощью матриц перехода $A_{i-1,i}$ и расширенного радиуса вектора координат $R_0 = A_{01}A_{12} \dots A_{k-1,k}R_k$ получены координаты схвата манипулятора в глобальной системе координат в зависимости от обобщенных координат.

Подстановкой обобщенных координат построена траектория движения схвата во времени.

Определив решения дифференциальных уравнений Лагранжа (4), найдем зависимости обобщенных координат, скоростей, ускорений и, применив закон равнопеременного движения для схвата, определим оптимальное движение схвата манипулятора.

Рассмотрен универсальный манипулятор с шестью степенями свободы, который включает в себя шесть звеньев, основание, приводы звеньев, схват.

При разработке динамических уравнений манипулятора применен матричный метод и матричные динамические уравнения Лагранжа. Звенья промышленного манипулятора модели-

руются стержнями, соединения моделируются цилиндрическими соединениями и скользящими соединениями. Предполагаем, что трение в соединениях невелико и не учитывается при выводе модели манипулятора.

Для численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений использован классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Получено решение системы дифференциальных уравнений движения манипулятора.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= -0,005 - 0,003t + 0,007t^2, \\ q_2(t) &= 3,1 + 0,128t - 0,011t^2, \\ q_3(t) &= 4,507 + 0,588t - 0,049t^2, \\ q_4(t) &= 0,167t^2, \\ q_5(t) &= 2,298 - 10,948t + 8,342t^2, \\ q_6(t) &= 0,239t^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для промышленных манипуляторов рассчитаны кинематические характеристики при значениях параметров масс и длин звеньев промышленного манипулятора.

Метод построения оптимальной пространственной траектории перемещения

В разделе рассматривается научная задача построения оптимальной пространственной траектории перемещения схвата относительно неподвижного основания стойки манипулятора в автоматизированном технологическом процессе. Решена задача определения оптимальной траектории схвата манипулятора при обходе препятствия. Предполагается, что движение схвата манипулятора можно разделить на три участка: равноускоренного, равномерного с постоянной скоростью и равнозамедленного. Полагаем, что в начальный момент времени схват находится в состоянии покоя.

Общее время перемещения схвата в конечную точку зависит от времени разгона до рабочей скорости, времени перемещения с постоянной рабочей скоростью и времени остановки. Предельная рабочая скорость манипулятора определяется техническими параметрами манипулятора и предполагается максимально допустимой. Предполагаем, что основным временем прохождения манипулятора является время равномерного движения с постоянной рабочей скоростью. Минимизирована общая длина траектории схвата манипулятора и определен самый быстрый путь – оптимальная траектория, по которой схват манипулятора дви-

жется с предельной рабочей скоростью. Траектория определяется в рабочей области манипулятора и предполагается, что в рабочей области манипулятор может выполнить любую траекторию. В рабочей области расположен объект-препятствие, которое обходит схват манипулятора, чтобы избежать столкновения.

Разработан гибридный метод АВІ (Algorithm A* and B-spline Interpolation) [5] для построения оптимальной траектории схвата манипулятора с учетом обхода препятствий. Гибридный метод АВІ включает шесть основных этапов. Метод сочетает в себе конечно-элементный сеточный подход, метод построения графовой модели, метод A* нахождения минимального пути для графа, метод B-сплайн интерполяции и матричный метод.

На первом этапе проводится триангуляция области действия схвата манипулятора и выполняется построение пространственной сеточной модели. Для пространственной рабочей области манипулятора, в которой также находится объект-препятствие или несколько препятствий, строится равномерная сеточная модель с одинаковыми конечными-элементами геометрическими примитивами в форме тетраэдра. В сеточной модели исключаются узлы, которые расположены внутри объекта-препятствия и добавляются граничные узлы. Уменьшение шага равномерной сетки увеличивает точность построения траектории, количество узлов, а также существенно увеличивает вычислительные затраты расчета модели.

На втором этапе выполняется построение трехмерной графовой модели на основе сеточной модели. На третьем этапе применяется метод A* определения кратчайшего пути в графовой модели. Алгоритм A* разработал в 1968 году Р.Е. Hart, N.J. Nilsson, В. Raphael на основе алгоритма Дейкстры с целью увеличения производительности с помощью эвристического подхода. В качестве эвристической функции приемлем эвклидово расстояние между узлами в трехмерном пространстве. Алгоритм A* пошагово просматривает все пути из начального узла к конечному, пока не определит минимальный. Для рассматриваемой задачи определения оптимальной траектории движения схвата манипулятора применение алгоритма A* сокращает общую длину пути схвата и, следовательно, время прохождения пути.

На четвертом этапе для ломаной траектории применена интерполяция B-сплайнами или полиномиальную интерполяцию сплайнами, представленными полиномами третьей и четвертой степени. Интерполяция B-сплайнами

отличается от обычной сплайн-интерполяции в определении вспомогательной функции для коэффициентов сплайна. При интерполяции B-сплайнами сшивка производится не в узлах, а в управляющих точках. Для произвольной кривой интерполяция кубическими полиномами обеспечивает сопряжение на граничных точках сегментов.

Интерполяция B-сплайнами гарантирует равенство первых и вторых производных при стыковке сегментов. При интерполяции полиномами порядка выше третьего появляется волнистость траектории. Для интерполяции B-сплайнами характерно несовпадение кривой с аппроксимируемыми точками. Если количество узлов совпадает со степенью сплайна, то B-сплайн становится кривой Безье. Кривая Безье является частным случаем многочленов Бернштейна. В методе Безье применяется аппроксимация многочленами Бернштейна. Базис Бернштейна является частным случаем для базисных B-сплайн функций.

Аппроксимация B-сплайнами обеспечивает более точное приближение, чем аппроксимация полиномами Бернштейна. Для метода Безье значения координат каждой точки кривой влияют на все вершины ломаной Безье. Для увеличения порядка кривой Безье необходимо увеличение числа вершин ломаной Безье. Наиболее предпочтительным является интерполяция B-сплайнами четвертой степени. Для того, чтобы после B-сплайн интерполяции результирующая траектория не входила в объект-препятствие, выбираются управляющие точки при сшивке сплайнов, отстающие от препятствия на заданную контролируемую дистанцию. Длина траектории обхода препятствий, построенная посредством интерполяции B-сплайнами четвертой степени, является минимальной.

На пятом этапе применена квадратичная аппроксимация траектории, построенной посредством интерполяции B-сплайнами. Выполнена аппроксимация траектории обхода препятствия полиномами второго порядка с учетом граничных условий, точного совпадения начальной и конечной точки траектории. Определены параметрические уравнения для оптимальной траектории схвата манипулятора вида:

$$\begin{aligned} Px(t) &= 12,397t - 6,397t^2, \\ Py(t) &= 1,145t + 4,855t^2, \\ Pz(t) &= 7,892t - 1,892t^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Длина траектории обхода препятствий, построенная по уравнениям равна 11,358.

Аппроксимации траектории полиномом второй степени удовлетворяет равнопере-

менному движению схвата манипулятора. В этом случае движение схвата манипулятора состоит из трех частей: равноускоренного, равномерного и равнозамедленного движения. На участке равноускоренного движения выполняется разгон схвата манипулятора с постоянным положительным ускорением из начального состояния покоя манипулятора. На участке равномерного движения схват манипулятора движется с постоянной рабочей скоростью без ускорения. На участке равнозамедленного движения выполняется перемещение схвата манипулятора к конечной точки траектории с постоянным отрицательным ускорением. В конечной точке траектории скорость схвата манипулятора равна нулю.

Предполагается, что рабочее движение схвата манипулятора на основном участке происходит с постоянной скоростью и обход препятствия происходит на равномерном участке движения схвата. Предположение равномерной скорости схвата необходимо, например, при перемещении манипулятором объектов, содержащих жидкую, текучую среду. Сглаживание траектории перемещения необходимо, чтобы удовлетворить равномерному движению схвата манипулятора при постоянной рабочей скорости и обеспечить непрерывность и плавность

движения схвата.

Результаты

Далее применен матричный метод для определения функций пространственных координат схвата манипулятора. Определим функции обобщенных координат для универсального манипулятора с шестью степенями свободы. Звенья промышленного манипулятора моделируются стержнями, соединения моделируются цилиндрическими соединениями и скользящими соединениями. Предполагаем, что трение в соединениях невелико и не учитывается при выводе модели манипулятора. Определена система координат звеньев манипулятора в точках $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$. Абсолютная система координат связана с неподвижным основанием манипулятора в точке O_0 . Приняты в качестве обобщенных координат манипулятора с шестью степенями свободы углы поворотов звеньев q_1, q_2, q_3, q_4, q_6 и длину выдвижения руки q_5 . Здесь измеряем углы в радианах, длины в сантиметрах.

Матричным методом определены координаты схвата манипулятора в абсолютной системе координат O_0 как функции обобщенных координат манипулятора:

$$\begin{aligned} x_6 &= \sin(q_1)(\sin(q_2)a_3 + \sin(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5)), \\ y_6 &= -\cos(q_1)(\sin(q_2)a_3 + \sin(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5)), \\ z_6 &= a_1 + a_2 + \cos(q_2)a_3 + \cos(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5). \end{aligned} \quad (11)$$

Для движения схвата манипулятора по оптимальной траектории с учетом обхода препятствия приравняем координаты схвата манипулятора к уравнениям для оптимальной траекто-

рии.

Получена система трех уравнений для определения $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$:

$$\begin{aligned} \sin(q_1)(\sin(q_2)a_3 + \sin(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5)) &= Px(t), \\ -\cos(q_1)(\sin(q_2)a_3 + \sin(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5)) &= Py(t), \\ a_1 + a_2 + \cos(q_2)a_3 + \cos(q_2 + q_3)(a_4 + a_5 + q_5) &= Pz(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Получено аналитическое решение системы уравнений (12):

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{Py(t)^2 - Px(t)^2}{Px(t)^2 + Py(t)^2} \right), \\ q_2(t) &= \arctg \left(\frac{a_3^3 P_{za} + a_3 P_{za} (-a_6^2 + P_{xy}^2 + P_{za}^2) - P_{xyza}}{a_3^2 (P_{xy}^2 + P_{za}^2)} \right), \\ q_3(t) &= -\arctg \left(\frac{1}{a_3^2 a_6 (P_{xy}^2 + P_{za}^2)^2} (a_3^5 (P_{xy}^2 - P_{za}^2) + a_3 a_6^2 (a_6^2 - P_{xy}^2 - P_{za}^2) (P_{xy}^2 - P_{za}^2) - \right. \\ &\quad \left. - a_3^3 (P_{xy}^2 - P_{za}^2) (2a_6^2 + P_{xy}^2 + P_{za}^2) + 2(a_3^2 - a_6^2) P_{za} P_{xyza} \right), \\ a_6 &= a_4 + a_5 + \frac{t^2 Q_5}{i_5^2 m_5 + i_6^2 m_6}, P_{za} = Pz(t) - a_1 - a_2, P_{xy} = Px(t)^2 + Py(t)^2, \\ P_{xyza} &= \sqrt{-a_3^2 P_{xy}^2 \left(a_3^4 + (-a_6^2 + P_{xy}^2 + P_{za}^2)^2 - 2a_3^2 (a_6^2 + P_{xy}^2 + P_{za}^2) \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналитическое решение для $q_4(t), q_5(t), q_6(t)$ получено из матричных ди-

намических уравнений Лагранжа.

$$q_4(t) = \frac{t^2 Q_4}{i_4^2 m_4 + i_5^2 m_5 + i_6^2 m_6}, q_5(t) = \frac{t^2 Q_5}{i_5^2 m_5 + i_6^2 m_6}, q_6(t) = \frac{t^2 Q_6}{i_6^2 m_6} \quad (14)$$

где Q_k – обобщенные силы звеньев; m_k – масса звена; i_k – радиус инерции звена.

Таким образом, определены функции обобщенных координат схвата манипулятора для движения схвата по оптимальной траектории с обходом препятствия.

Обсуждение

Представлено сравнение гибридного метода АВІ с известными методами определения траектории манипулятора в автоматизированном технологическом процессе.

Метод декомпозиции на ячейки применим для двухмерного пространства. Высокая сложность метода построения сетки для сложной граничной области. Точность метода зависит от размера ячеек и метода поиска последовательности переходов по разрешенным ячейкам [8, 9].

Метод АВІ применим для трехмерного пространства. Для повышения точности на граничных участках применяется неравномерная сеточная модель. Точность гибридного метода обеспечивается применением общепризнанного метода A^* для графовой сеточной модели что гарантирует нахождение оптимального пути манипулятора.

В методе построения вероятностной дорожной карты применяют случайные выборки в конфигурации. Недостатком этого метода является отыскание не всегда оптимального пути [10, 11]. Метод АВІ не использует случайные выборки в конфигурации, а применяет последовательность внедренных методов. В результате получен оптимальный путь.

В методе потенциального поля определяется функция потенциального поля, под действием которой движется манипулятор как материальная точка в двухмерном пространстве. При поиске глобального минимума функции методом градиентного спуска может быть получено не оптимальное решение, а локальный минимум. Также недостатком этого метода является возможность отыскания неоптимального пути обхода препятствия [12].

В методе АВІ задача нахождения оптимального пути в трехмерном пространстве решается методом A^* . Оптимизационная задача решается на графовой модели методом A^* , не используются неточные методы оптимизации

для целевой функции.

В методе интерполяции с помощью сплайн-функций применяется представление полиномами высоких степеней обобщенных координат для каждого звена между заданными конфигурациями. Недостатком этого метода является задание только определенной степени полинома для разрешения матричного уравнения относительно неизвестных коэффициентов полиномов. В случае многосегментной траектории не удовлетворяется условие гладкости траектории в узлах сшивки сегментов [13].

В методе АВІ для ломаной траектории применяется интерполяция В-сплайнами или полиномиальная интерполяция сплайнами. Для траектории применяется интерполяция сплайнами, представленными полиномами произвольного заданного порядка. В методе АВІ выбор произвольной степени полинома обеспечивается заданием соответствующего числа узлов на траектории. Для результирующей траектории обеспечивается условие гладкости.

Представленный гибридный метод АВІ позволяет построить оптимальную траекторию движения манипулятора в роботизированном производстве при обходе препятствий и контролировать движение по траектории. В результате применения гибридного метода получена оптимальная траектория движения схвата манипулятора, которая обеспечивает непрерывность и плавность движения схвата. Минимизация длины траектории при обходе препятствия позволяет уменьшить время рабочего такта манипулятора. В отличие от рассмотренных работ, гибридный метод является многоэтапным и сочетает в себе методы построения сеточной модели, графовые методы определения кратчайшего пути, интерполяцию, аппроксимацию и матричные методы. Комбинация этих методов позволяет решить задачу определения оптимальной траектории при обходе препятствия схватом манипулятора в предположении равномерного движения схвата на основном рабочем участке.

Заключение

В работе исследованы нелинейные математические модели манипуляторов в автоматизированном производстве для повышения быстроты действия и точности выполнения операции

на производственной линии. Исследуемый манипулятор применяется для создания автоматизированных комплексов обслуживания механизмов и оборудования. При создании динамических уравнений движения применен матричный метод и уравнения Лагранжа второго рода. Исследована кинематическая структура манипулятора. Математическая модель представлена нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для построения решения предложенной системы применены аналитические методы. Определены основные динамические характеристики движения манипулятора.

Разработана нелинейная математическая модель промышленного манипулятора с шестью степенями свободы. Для составления уравнений движения манипулятора применен метод матриц и уравнения Лагранжа второго рода. Манипулятор предназначен для создания автоматизированных комплексов, для обслуживания механизмов, устройств и станков, для снятия и установки оборудования, смены деталей, инструмента. Кинематическая структура манипулятора исследована, динамические характеристики движения манипулятора определены. Математическая модель представлена нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Определены обобщенные силы звеньев для перемещения схвата в заданную точку пространства за определенный промежуток времени.

Разработана кинематическая схема манипулятора с шестью степенями свободы и исследована математическая модель манипулятора матричным методом. В результате анализа математической модели определены координаты, скорости и ускорения звеньев манипулятора. Определена пространственная траектория движения схвата в абсолютной системе координат. Математические расчеты проверялись в специализированных компьютерных математических пакетах. Математическая модель манипулятора позволяет проектировать манипуляторы с шестью степенями свободы и разрабатывать автоматизированные робототехнические системы для автоматизации производства.

Корректность математической модели промышленного манипулятора обоснована применением общепризнанного матричного метода в кинематике манипуляторов, применением классических матричных уравнений Лагранжа в динамике манипуляторов. Контроль точности получаемых результатов выполнялся посредством вычислений в компьютерных инженерных пакетах. Математическая модель ма-

нипулятора позволяет проектировать манипуляторы с шестью степенями свободы и разрабатывать автоматизированные робототехнические системы.

Представлен гибридный метод АВІ оптимизации траектории движения манипуляторов в автоматизированном производстве. Гибридный метод АВІ включает шесть основных этапов. Метод сочетает в себе конечно-элементный сеточный подход, метод построения графовой модели, метод A^* нахождения минимального пути для графа, метод В-сплайн интерполяции и матричный метод. Сочетание сеточных, графовых, интерполяционных и матричных методов позволяет полностью решить поставленную задачу. Таким образом, в работе решена комплексная научная задача исследования моделей манипуляторов в технологическом процессе производства и разработан метод оптимизации режимов движения манипуляторов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Robot skills for manufacturing: From concept to industrial deployment** / Pedersen M.R., Nalpantidis L. et. al. // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 37, 282-291.
2. **Faulwasser T., Weber T., Zometa P., Findeisen R.** Implementation of nonlinear model predictive path-following control for an industrial robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(4), 1505-1511.
3. **Kaltsoukalas K., Makris S., Chryssolouris G.** On generating the motion of industrial robot manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 32, 65-71.
4. **Meleshkova Z., Ivanov S.E., Ivanova L.** Application of Neural ODE with embedded hybrid method for robotic manipulator control // *Procedia Computer Science*, 2021, 193, 314-324.
5. **Ivanov S., Ivanova L., Meleshkova Z.** Calculation and Optimization of Industrial Robots Motion // 2020 26th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). *IEEE*, 2020, 115-123.
6. **Televnoy A., Ivanov S.E., Zudilova T., Ivanova L.N.** Transformation method for a nonlinear manipulator model // *Procedia Computer Science*, 2021, 193, 295-305.
7. **Ivanov S.E., Zudilova T., Voitiuk T., Ivanova, L.N.** Mathematical Modeling of the Dynamics of 3-DOF Robot-Manipulator with Software Control // *Procedia Computer Science*, 2020, 178, 311-319.
8. **Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.** Stabilization of linear plants with unknown delay and sinusoidal disturbance compensation // 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). *IEEE*, 2016, 426-430.
9. **LaValle S. M., Branicky M.S., Lindemann S.R.** On the relationship between classical grid search and probabilistic roadmaps // *The International Journal of Robotics Research*, 2004, 23, 7-8, 673-692.
10. **Leven P., Hutchinson S.** Using manipulability to bias sampling during the construction of probabilistic

roadmaps //IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19, 6, 1020-1026.

11. **Isto P.** Constructing probabilistic roadmaps with powerful local planning and path optimization //IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2002, 3, 2323-2328.

12. **Output** control algorithms of dynamic positioning and disturbance rejection for robotic vessel / Wang J., Pyrkin A. A. et. al. //IFAC-PapersOnLine, 2015, 48, 11, 295-300.

13. **Simple** robust and adaptive tracking control for mobile robots / Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. et. al. // IFAC-PapersOnLine, 2015, 48, 11, 143-149.

REFERENCES

1. **Robot skills for manufacturing:** From concept to industrial deployment / Pedersen M.R., Nalpantidis L. et. al. // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 37, 282-291.

2. Faulwasser T., Weber T., Zometa P., Findeisen R. Implementation of nonlinear model predictive path-following control for an industrial robot. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 25(4), 1505-1511.

3. Kaltsoukalas K., Makris S., Chryssolouris G. On generating the motion of industrial robot manipulators. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 32, 65-71.

4. Meleshkova Z., Ivanov S.E., Ivanova L. Application of Neural ODE with embedded hybrid method for robotic manipulator control //Procedia Computer Science, 2021, 193, 314-324.

5. Ivanov S., Ivanova L., Meleshkova Z. Calculation and Optimization of Industrial Robots Motion // 2020 26th Conference of Open Innovations Association (FRUCT).

IEEE, 2020, 115-123.

6. Televnoy A., Ivanov S.E., Zudilova T. Ivanova L.N. Transformation method for a nonlinear manipulator model // Procedia Computer Science, 2021, 193, 295-305.

7. Ivanov S.E., Zudilova T., Voitiuk T., Ivanova, L.N. Mathematical Modeling of the Dynamics of 3-DOF Robot-Manipulator with Software Control // Procedia Computer Science, 2020, 178, 311-319.

8. Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Stabilization of linear plants with unknown delay and sinusoidal disturbance compensation // 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). IEEE, 2016, 426-430.

9. LaValle S. M., Branicky M.S., Lindemann S.R. On the relationship between classical grid search and probabilistic roadmaps // The International Journal of Robotics Research, 2004, 23, 7-8, 673-692.

10. Leven P., Hutchinson S. Using manipulability to bias sampling during the construction of probabilistic roadmaps //IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19, 6, 1020-1026.

11. Isto P. Constructing probabilistic roadmaps with powerful local planning and path optimization //IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2002, 3, 2323-2328.

12. Output control algorithms of dynamic positioning and disturbance rejection for robotic vessel / Wang J., Pyrkin A. A. et. al. //IFAC-PapersOnLine, 2015, 48, 11, 295-300.

13. Simple robust and adaptive tracking control for mobile robots / Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. et. al. // IFAC-PapersOnLine, 2015, 48, 11, 143-149.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 11.07.2022; одобрена после рецензирования 30.07.2022; принята к публикации 16.08.2022.

The article was submitted 11.07.2022; approved after reviewing 30.07.2022; asseped for publication 16.08.2022.

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Брянский государственный технический университет»

Адрес редакции и издателя: 241035, Брянская область, г. Брянск, бульвар 50 лет Октября, 7
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»

Телефон редакции журнала: 8-903-592-87-39, 8-903-868-85-68.

E-mail: naukatm@yandex.ru, editntm@yandex.ru

Вёрстка С.В. Морозов. Редактор Д.А. Петраченко. Технический редактор С.В. Морозов.

Сдано в набор 17.11.2022. Выход в свет 30.11.2022.

Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,58.

Тираж 500 экз. Свободная цена.

Отпечатано в лаборатории оперативной полиграфии

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Брянский государственный технический университет» 241035, Брянская область, г. Брянск, ул. Институтская, 16